POLL.
PAPPVS
REN.
Commend

4. Libri d'Apollonio con Carte N.o 118
2. Libri di Sereno con Carte N.ro 30
146
fogli 73

Χ. γ. ζ. η. α ψυγ.

manu fuerat Vinc. Viviani cuius annotationes sunt marginibus adscriptae.

Esemplare prezioso per le postille del Viviani, cui appartenne.

VI. A

APOLLONII

PERGAEI CONICORVM LIBRI QVATTVOR.

VNA' CVM PAPPI ALEXANDRINI LEMMATIBVS, ET COMMENTARIIS EVTOCII ASCALONITAE.

SERENI ANTINSENSIS PHILOSOPHI LIBRI DVO NVNC PRIMVM IN LVCEM EDITI.

QVAE OMNIA NVPER FEDERICVS Commandinus Vrbinas mendis quamplurimis expurgata è Græco conuertit, & commentariis illustrauit.

CVM PRIVILEGIO PII IIII. PONT. MAX. IN ANNOS X.

BONONIAE, EX OFFICINA ALEXANDRI BENATII. M D LXVI.

GVIDO VBALDO II.
VRBINATVM DVCI IIII.
ALMAEQVE VRBIS PRAEFECTO.

EX omnibus Philosophiæ partibus, ut nulla certior, atque ad ueritatis rationem accommodatior est, quàm quæ à Græcis Mathematice dicitur, sic nulla obscurior, atque ad cognoscendum difficilior esse hoc tempore potest. Huius autem facti culpam, cũ ipsa rei natura, & subtilitas, tum maxime occupata nostrorum hominum in aliis artibus explicandis industria, ac nimia in plerisque, ut uere dicam, rerum ab usu uitæ communis remotarum negligentia sustinet. Quòd si qua alia pars est, quæ nostris incognita Philosophis, interpretationis lumen aliquod postulet, ea profectò est, quæ de conicis appellatur. quanquam enim à Veteribus diligenter tractata sit, tamen eorum monumenta aut ad nos non peruenerunt, aut ita peruenerunt, ut uix, propter multas uetustatis iniurias, maximasq; difficultates intelligantur. Ac primus quidem, ut colligi potest, hanc conicorum disputationem quattuor libris editis tractauit Euclides. quos deinde cum Apollonius Pergæus uir eximio ingenio, atque exquisita doctrina præditus usque ad octo perduxisset, incredibile est, quantam huic scientiæ accessionem, dignitatemq; adiunxerit. quorum quattuor primi græce scripti adhuc leguntur, reliqui temporum superiorum calamitate desiderantur. Verum cum in his demonstrationes illę breues ferè, atque obscuras attulisset, ac multa lemmata incognita pro notis adhibuisset, factum est, ut tantæ tollendæ difficultatis caussa multi se ad eorum expositionem contulerint. inter quos Pappus Alexandrinus, & Eutocius Ascalonita reliquis facilè eruditionis laude, & ingenii præstiterunt. Neque uero dubitandum est, quin illi huic studio plurimum opis afferre hoc tempore possent, si eorum scripta aut multis paterent, aut satis emendata in manibus hominum uersarentur: atque hæc quidem me caussa potissimum impulit, ut huius disciplinæ subleuandæ gratia, eos de græco conuerterem, ac commentariis quoque meis explicarem. nam cum in Archimedis & Ptolemæi libris aliquot interpretandis, qui sine conicorum doctrina nulla ratione percipi possunt, demonstrationes Apollonii multas adhibuerim, quæ sine græco libro (quòd latinus corruptissimus sit) parum intelligantur; feci non inuitus, idq; multorum amicorum, quibus honeste denegare non poteram, uoluntate, primum ut Apollonium ipsum quàm planissime possem, conuerterem, atque in hac parte, quæ plurimum egere auxilii uidebatur, ægræ propè ac laboranti mathematicæ disciplinæ succurrerem: deinde uero ut Pappi lemmata, atque Eutocii in Apollonium commentarios latinos facerem, in quibus, quòd plurimis affecti uitiis erant, plus etiam laboris, atque operæ, quàm in ipso Apollonio posui; quippe qui multis in locis demonstrationes integras, quarum uix uestigia apparebant, instaurare necesse habui. Post autem, cum uehementius iam rei inchoatæ amore, atque communis utilitatis studio, ut semper aliàs inflammatus essem, eosdem etiam, ut omnia faciliora cognitu essent, propriis declarare commentariis uolui: quo factum est, ut doctrinæ, infinitis quondam uetustatis, atque inscitiæ tenebris inuolutæ, non minimum lucis atque splendoris, ut res ipsa cognoscere cupientibus indicabit, attulerim. Hæc igitur qualiacunque sint, omnia uno colligata uolumine in tuo nomine ad communem omnium utilitatem hoc tempore edo, atque diuulgo, GVIDE VBALDE Dux præstantissime: quod cũ facio, non solum officio meo seruio, ut in cuius ditione, atque imperio natus sum, eum omni cultu, atque obseruantia prosequar: sed in eo etiam exemplum doctissimorũ hominum sequor, ut à quo plurimum ornamenti, atque subsidii litteræ acceperunt, eum potissimum omnibus litterarum monumentis exornent. Tu autem is es, cuius familiæ magnam partem ornamentorum quæ retinent, ipsa doctrinæ studia debeant. Nam FEDERICVS proauus tuus, qui primus Ducalem honorem uestram in familiam intulit, cum plurimis rei militaris laudibus floruit, tum maximam inde sibi gloriam comparauit, quòd vnice litteras, litteratosq; semper dilexit; quod, cum libri multi in eius nomine à doctis hominibus editi, tum bibliotheca, hebræorum, græcorum, & latinorum librorũ copia mirabiliter instructa testantur: cuius uestigia, GVIDVS VBALDVS filius imitatus, & ipse præter hæreditariam rei bellicæ laudem, cum omnibus litteris fuit eruditus, tum eruditorum hominum ingenio mirifice semper est delectatus. Quos eosdem FRANCISCVS MARIA nepos eius, idemq; pater tuus, quanquam studio rei militaris (cuius gloria præter ceteros floruit) intentus, summo studio semper complexus est, ac mirifice coluit. Eorum omnium laudibus tu ita successisti, ut ad proprium decus, haud multum tibi sit ex paterna, domesticaq; gloria hauriendum: nam, cum rem militarem ita tenes, ut in ea excellas; tum latinis, græcisq; litteris perinde doctus es, atque si totam in hoc studio ætatem consumpseris. Itaque non ſolum inſignibus rei bellicæ decoratus ampliſſimis es, cum Venetarum copiarum, & Pontificiarum Dux fueris, atque PHILIPPI Hiſpaniarum Regis hodie in Italia Generalis, atque almæ urbis præfectus ſis, ſed etiam in hoc litterarum ſtudio eas tibi laudes peperiſti, quas nulla unquam poſteritatis obliuio obſcurabit: nam & bibliothecam aui tam optimis libris adauxiſti, & litteris deditos homines complecti omni ſtudio, ac fouere non ceſſas. Inter quos, quoniam me quoque eſſe tua humanitas uoluit, ingratus propè, atque impius ſim, niſi te, ut intimis animi mei ſenſibus colo, ſic omnibus ingenii mei monumentis, quoad poſſum, honorem. Vale.

Federicus Commandinus.

DE APOLLONIO EX PAPPO.

EVCLIDIS libros quattuor conicorum cum Apollonius expleuisset, ac quattuor alios adiunxisset; octo conicorum libros confecit. Aristæus autem, qui scribit ea, quæ ad hoc usque tempus tradita sunt, solidorum locorum libros quinque conicis cohærentes uocauit. & qui ante Apollonium fuerunt, trium conicarum linearum, unam quidem coni acutianguli, alteram rectanguli, tertiam uero obtusianguli coni sectionem appellarũt. Quoniam autem, in vnoquoque horum trium conorum differenter sectorum tres lineæ fiunt, dubitans, ut apparet, Apollonius, cur nam, qui ante se hanc tractationem expleuerant, unam quidem acutianguli coni sectionem uocauerunt, quæ potest & rectanguli, & obtusianguli coni esse; alteram rectanguli, quæ potest & in acutiangulo, & obtusiangulo cono reperiri; tertiam uero obtusianguli, quæ & in acutiangulo, & rectangulo cono inesse potest; mutatis nominibus, quæ quidem acutianguli coni sectio nominatur, ellipsim appellat; quæ rectanguli, parabolen, quæ uero obtusianguli, hyperbolen; unicuique, ab aliquo proprio accidente, nomen imponens. Spatium enim quoddam ad lineam quampiam comparatum in acutianguli coni sectione, deficiens fit quadrato; in obtusianguli coni sectione, quadrato excedens; in rectanguli uero coni sectione, neque deficiens, neque excedens. Hoc autem illi accidit, quòd non considerauit iuxta unum duntaxat casum plani conum secantis, & tres lineas gignentis, in unoquoque conorum aliam atque aliam fieri lineam, quam, à coni proprietate nominarunt. Si enim secans planum ducatur uni lateri coni æquidistans, una tãtum ex tribus lineis efficitur semper eadem, quam, Aristæus illius coni sectionem appellauit.

EX EVTOCIO, ET GEMINO.

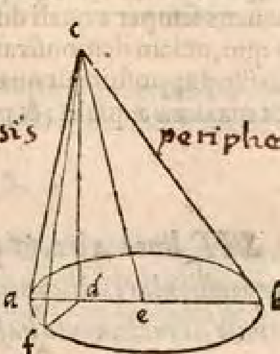
APollonius geometra natus est Pergæ, quæ Pamphiliæ ciuitas est, tempore Ptolemæi Euergetæ, ut tradit Heraclius in Archimedis uita. qui etiam scribit Archimedem quidem primum conica theoremata fuisse aggressum; Apollonium uerò, cum ea inuenisset ab Archimede nondum edita, sicut propria sua edidisse. Neque id uerè, ut mea fert opinio. Nam & Archimedes multis in locis, uelut antiquioris conicorum institutionis mentionem facere uidetur:

& Apollonius ea scribit, non ut à se ipso inuenta. non enim dixisset, uberius & uniuersalius hæc à se, quàm ab aliis tractata fuisse. Sed quod scribit Geminus uerum est. Antiqui, inquit, conum diffinientes, rectanguli trianguli circumuolutionem, manente uno eorum, quæ circa rectum angulum sunt, latere; & conos omnes rectos, & unam in singulis sectionē fieri arbitrati sunt: in rectangulo quidem cono vocatam parabolen; in obtusiangulo hyperbolen; in acutiangulo autem ellipsim. atque ita nominatas apud ipsos sectiones passim inuenias. Quemadmodum igitur antiquis illis in unaquaque triangulorum specie contemplantibus duos rectos, primum in æquilatero, deinde in æquicruri, postea in scaleno, ætate posteriores uniuersale theorema demonstrarunt eiusmodi. Omnis trianguli interiores tres anguli, duobus rectis sunt æquales: ita & in coni sectionibus; rectanguli quidem coni sectionem dictam, in rectāgulo tantum cono contemplati sunt; secto scilicet plano ad unum coni latus recto: obtusianguli autem coni sectionem in cono obtusiangulo factam demonstrarunt, & acutianguli sectionem in cono acutiangulo; similiter in omnibus conis ducentes plana ad unum eorum latus recta: quod & antiqua sectionum nomina indicant. Verum postea Apollonius Pergæus uniuerse inspexit in omni cono tam recto, quàm scaleno, omnes sectiones inesse, iuxta plani ad conum differentem inclinationem. Quamobrem illius temporis homines admirati mirificam conicorum theorematum demonstrationem, magnum geometram ipsum appellarunt. Hæc quidem Geminus in sexto mathematicarum præceptionum libro scripta reliquit.

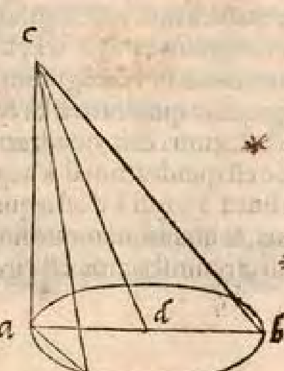
PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA IN PRIMVM LIBRVM CONICORVM APOLLONII.
CVM COMMENTARIIS FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS.

LEMMA PRIMVM.

SIT conus, cuius basis circulus a b, & uertex punctum c. Si igitur æquicruris est conus; manifestò constat, lineas omnes, quæ ab ipso c ad a b circuli circumferentiam ducuntur, inter se se æquales esse. Si uerò scalenus est; oporteat inuenire, quæ maxima sit, & quæ minima cravaque *a coni uertice c ad basis* periphenam duci possunt.



DVCATVR à puncto c ad planum circuli a b linea perpendicularis: quæ primùm cadat intra circulũ; sitq; c d: & sumatur centrum eius, quod sit e: & iuncta d e producatur in utramque partem ad puncta a, b: deinde a c, c b iungãtur. Dico ipsam b c maximam esse, & c a minimam, linearum omnium, quæ à pũcto c ad circulum a b pertinent. Ducatur enim alia quædam linea c f, & f d iungatur. maior igitur est b d, quàm d f: commu- * 7. tertii.
nis autem c d: & anguli, qui ad d recti. ergo maior est b c, quàm c f. Eodem modo & * 2. diff. 11.
c f maior ostendetur, quàm c a. Ex quibus apparet lineam c b omnium maximam, * 47. primi
a c uero minimam esse.



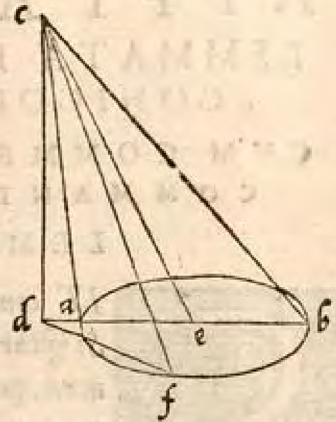
Rursus à puncto c perpendicularis ducta cadat in ipsius a b circuli circumferentiam; quæ sit c a: & cum circuli centro d copulata a d producatur in b: & b c iungatur. Dico b c maximam esse, & a c minimam. lineam igitur c b, maiorem esse, quàm c a, perspicuum est. Ducatur * 19. ~~18~~. primi
autem alia quædam linea c e; & iungatur a e. Itaque, quoniam a b diameter est, necessario maior erit, quàm a e; & continet a c cum ipsis a b, a e angulum rectum, * ~~15. primi~~ 15. tertij
ergo c b, quàm c e maior erit; & similiter maior, * 3. diff. undecimi
quàm ceteræ omnes. Eodem modo & c e maior ostendetur, quam c a. Quare sequitur, ut c b maxima sit, c a uero minima linearum omnium, quæ ab ipso c ad circulum a b pertinent.

Fig. 3.

Iisdem positis, cadat perpendicularis c d extra circulum: & ad e circuli centrum ducta d e producatur: iunganturq; a c, b c. Dico b c maximam, & c a minimam esse omnium, quæ à puncto c ad a b circulum perducuntur. constat namq; b c maiorem esse ipsa c a: sed & maior erit omnibus, quæ ab ipso c in circumferentiam circuli a b cadunt. Ducatur enim alia quædam linea c f: & d f iungatur. Cum igitur b d per centrum transeat, maior est, quàm d f: est autem c d perpendicularis ad lineas d b, d f, quoniam & ad ipsum planum; ergo maior erit b c, quàm c f. & similiter maior, quam aliæ omnes. perspicuum est igitur ipsam c b maximam esse. At uerò a c minimam hoc modo ostendemus. Quoniam enim minor est a d, quàm d f; atque est ad ipsas perpendicularis d c, minor erit a c, quam c f. & ita minor, quam aliæ.

8. tertii *
3. diff. undecimi *
8. tertii *
* ex 47. primi.

linea igitur a c minima est, & b c maxima omnium, quæ à puncto c ad a b circuli circumferentiam perducuntur.



Diffinitio prima Apollonii.

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in utrãq; partem producatur: &c.

Conuenienter Apollonius addidit, in utrãque partem producatur: cum uniuscuiusque coni generationem tradat. Si enim æquicruris sit conus, frustra produceretur, quòd recta linea, quæ conuertitur, circumferentiam circuli perpetuo contingit; quippe cum ab ea punctũ manens semper æquali distet interuallo. Sed quoniam potest & scalenus esse conus, in quo, ut iam demonstratum est, & maximum, & minimum latus inuenitur, necessario illud apposuit; ut quæ minima est linea, usqueadeo augeri intelligatur, quoad fiat maximæ æqualis: & propterea circuli circumferentiam semper contingat.

LEMMA II.

quidem recta

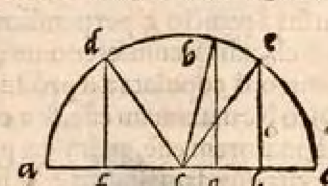
SIT linea a b c, & positione data a c; omnes autem, quæ ab ipsa a b c ad a c perpendiculares ducuntur, ita se habeant, ut quadratum uniuscuiusque ipsarum æquale sit rectangulo basis partibus, quæ ab ipsa secantur, contento. Dico a b c circuli circumferentiam esse; diametrum autem ipsius lineam a c.

DVCANTVR enim à punctis d, b, e perpendiculares d f, b g, e h. ergo quadratum d f æquale est rectangulo a f c: & quadratum b g rectangulo a g c: ipsum uero e h quadratum rectangulo a h c æquale. secetur a c bifariam in k; & d k, k b, k e iungantur. Itaq; quoniam a f c rectãgulum unà cum quadrato f k est æquale quadrato a k: & ipsi a f c æquale est d f quadratum: erit quadratum d f unà cũ ipso f k, hoc est quadratum d k æquale quadrato a k. quare linea a k ipsi k d est æqualis. Similiter ostendemus, & unamquamque linearum b k, e k, ipsi a k, uel k c æqualem esse. ergo a b c circuli circumferentia est circa centrum k, hoc est circa diametrum a c.

5. secũdi.

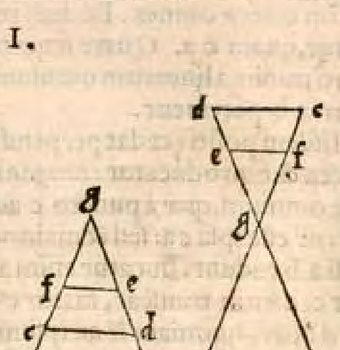
47. primi.

15. diffin. primi.



LEMMA III.

SINT tres lineæ æquidistantes a b, c d, e f: & in ipsas ducantur duæ rectæ lineæ a g, f c, b g, e d. Dico ut rectangulum quod fit ex a b, & e f ad quadratum c d, ita esse rectangulum a g f ad quadratum g c.



lemm. in 22. decimi.

4. sexti

QVONIAM enim ut linea a b ad f e; hoc est ut rectangulum ex a b, & f e ad f e quadratum, ita linea a g ad ipsam g f; hoc est rectangulum a g f ad quadratum g f: erit ut rectãgulum ex a b & f e, ad quadratum f e, ita rectangulum a g f ad quadratum g f. sed ut quadratum f e ad quadratum c d, sic quadratum f g ad quadratum g c. ex æquali igitur ut rectangulũ ex a b & f e ad quadratum c d, sic rectangulum a g f ad g c quadratum. 4. & 22. sexti.

LEMMA IIII.

SIT ut a b ad b c, ita a d ad d c: & secetur a c bifariam in puncto e. Dico rectangulum b e d quadrato e c æquale esse: itemq; rectangulum a d c æquale rectangulo b d e, & rectangulum a b c rectangulo e b d.

QVONIAM enim ut a b ad b c, ita est a d ad d c; erit componendo, sumptisq; antecedentium dimidiis, & per conuersionem rationis, ut b e ad e c, ita c e ad e d. rectãgulum igitur b e d æquale est e c quadrato. commune auferatur, quadratum scilicet e d. ergo quod relinquitur, rectangulum a d c rectangulo b d e est æquale. Rursus, quoniam rectangulum b e d æquale est quadrato c e, utraque auferantur à quadrato b e. reliquum igitur rectangulum a b c rectangulo e b d æquale erit. quæ omnia demonstrare oportebat. A B 17. sexti C

COMMENTARIVS.

ERIT componendo, sumptisq; antecedentium dimidiis. & per conuersionem rationis.] *Quoniam ut a b ad b c, ita a d ad d c; erit componendo ut a b, b c ad c b, ita a c ad c d; & antecedentium dimidia, ut e b ad b c, ita e c ad c d. est enim a e ipsius a c dimidia. quare per conuersionem rationis ut b e ad e c, ita c e ad e d.* A

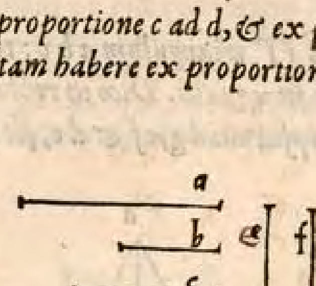
Commune auferatur, quadratum scilicet e d.] *Est enim quadratum e c æquale rectangulo a d c unà cum quadrato e d: & rectangulum b e d æquale rectangulo b d e unà cum e d quadrato. quare sublato communi; relinquitur rectangulum a d c rectangulo b d e æquale.* B 5. secũdi. 3

Rursus quoniam rectangulum b e d æquale est quadrato e c, utraque auferantur à quadrato b e.] *Nam cum linea a c bifariam secetur in e, atque ipsi addatur linea c b; rectangulum a b c, & quadratum c e æqualia sunt quadrato b e. rursus, quadrato b e æqualia sunt utraque rectangula e b d, b e d. si igitur ab ipso b e quadrato æqualia auferantur, uidelicet rectangulum b e d, & quadratum c e; relinquitur rectangulum a b c rectangulo e b d æquale esse.* C 6. secundi 2.

LEMMA V.

HABEAT a ad b proportionem compositã ex proportione c ad d, & ex proportione e ad f. Dico c ad d proportionem compositam habere ex proportione a ad b, & proportione f ad e.

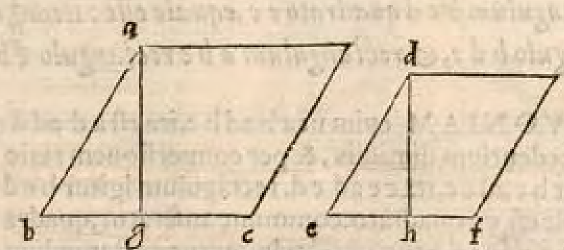
FIAT enim proportio d ad g eadem, quæ est e ad f. & quoniam proportio a ad b composita est ex proportione c ad d, & proportione e ad f, hoc est d ad g: proportio autem composita ex proportione c ad d, & d ad g est eadem, quæ c ad g: erit ut a ad b, ita c ad g. Rursus, quoniam c ad d proportionem habet compositam ex proportione c ad g, & proportione g ad d: sed proportio c ad g demonstrata est eadem, quæ a ad b: & conuertendo proportio g ad d eadem est, quæ f ad e: habebit c ad d proportionem compositam ex proportione a ad b, & proportione f ad e.



LEMMA VI.

8

SINT duo parallelogramma a c, d f æquiangula, quorum angulus b sit æqualis angulo e. Dico ut rectangulum a b c ad rectangulum d e f, ita esse parallelogrammum a c ad d f parallelogrammum.

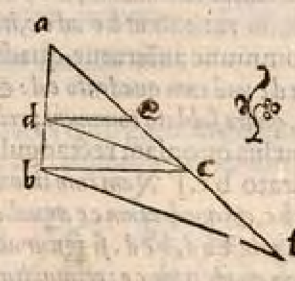


Si enim anguli b e recti sint, illud perspicue constat: sin minus, demittantur perpendiculares a g, d h. & quoniam angulus b æqualis est angulo e; & angulus ad g rectus æqualis recto ad h: erit triangulum a b g triangulo d e h æquiangulum. quare
4. sexti ut b a ad a g, ita e d ad d h. sed ut b a ad a g, ita rectangulum a b c ad rectangulum
1 quod a g, b c continetur: & ut e d ad d h, ita d e f rectangulum ad rectangulum contentum d h, e f. quare permutando ut rectangulum a b c ad rectangulum d e f, ita
36. primi. rectangulum, quod continetur a g, b c; hoc est parallelogrammum a c ad rectangulum contentnm d h, e f; hoc est ad parallelogrammum d f.

LEMMA VII.

9

SIT triangulum a b c: sitq; b c æquidistans d e, & quadratum, quod fit ex c a æquale sit rectangulo f a e. Dico iam si iungantur d c, b f, lineam b f, ipsi d c æquidistantem esse.



14. sexti HOC uero manifeste patet. quoniam enim ut
4 f a, ad a c, ita est c a ad a e; & ut c a ad a e, ita b a
2 ad a d: erit ut f a ad a c, ita b a ad a d. ergo d c, b f
inter se se æquidistantes sunt.

LEMMA VIII.

10

SIT triangulum a b c: trapezium uero d e f g, ita ut a b c angulus angulo d e f sit æqualis. Dico ut rectangulum a b c ad rectangulum, quod continetur utraque ipsarum d g, e f & d e, sic esse triangulum a b c ad trapezium d e f g.

DVCANTVR enim perpendiculares a h, d k. & quoniam angulus a b c æqua-
4. sexti lis est angulo d e f; & qui est ad h rectus æqualis recto ad k; erit ut b a ad a h, ita e d
1 ad d k. sed ut b a ad a h, ita rectangulum a b c ad id, quod continetur a h, b c: & ut e d
ad

ad d k, ita rectangulum, quod continetur utraque d g, e f,& d e ad contentum utraque d g, e f & d k. Est autem triangulum a b c dimidium rectanguli contenti a h, b c: A
& trapezium d e f g dimidium eius, quod utraque d g, e f & d k continetur. ergo ut B
rectangulum a b c ad rectangulum contentum utraque d g, e f, & d e, ita est triangulum a b c ad d e f g trapezium. Quod si a b c triangulum sit, & d f parallelogrammũ; eadem ratione fiet, ut a b c triangulum ad d f parallelogrammum, ita rectangulum a b c ad duplum rectanguli d e f.

Ex quibus constat, rectangulum a b c, siquidem d f parallelogrammum sit, C
æquale esse duplo rectanguli d e f: si uero sit trapezium, æquale ei, quod utraque d g, e f & ipsa d e continetur.

COMMENTARIVS.

EST autem triangulum a b c dimidium rectanguli contenti a h, b c, & trapeziũ A
d e f g dimidium eius, quod utraque d g, e f & d k continetur.] *Iuncta enim d f erit triangulum e d f dimidium rectanguli contenti e f & d k: & triangulum d f g itidem dimidium eius, quod continetur d g & d k. ergo totum trapezium d e f g dimidium est rectanguli, quod utraque e f, d g, & ipsa d k continetur.*

Ergo ut rectangulum a b c ad rectangulum contentum utraque d g, e f & d e, ita B
est triangulum a b c ad d e f g trapezium.] *Ex ante dictis enim colligitur ut rectangulum a b c ad rectangulum ex a h, & b c, ita esse rectangulum ex d g, e f & d e ad rectangulum ex d g, e f & d k. quare permutando ut rectangulum a b c ad rectangulum ex d g, e f, & d e, ita rectangulum ex a h & b c ad rectangulum ex d g, e f & d k; & ita eorum dimidia, hoc est triangulum a b c ad trapezium d e f g.*

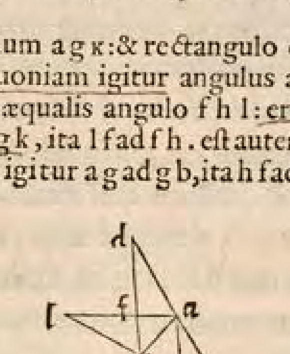
Ex quibus constat rectangulum a b c, siquidem d f parallelogrammum sit &c.] C
Sequitur hoc quando triangulum a b c parallelogrammo, uel trapezio d e f g sit æquale. quod etiam ab Eutocio demonstratur in comentarijs in 49 primi libri Apollonij. quare uerisimile est in Pappi uerbis hoc loco nonnulla desiderari.

LEMMA IX.

Sit triangulum a b c, & producta c a ad d, ducatur ut contingit, recta linea d h e; cui quidem æquidistans ducatur a g: ipsi uero b c æquidistans a f. Dico ut quadratum a g ad rectangulum b g c, ita esse rectangulum d f h ad quadratũ f a.

PONATVR rectangulo b g c æquale rectangulum a g k: & rectangulo d f h A
æquale rectangulum a f l: & iungantur b k, h l. Quoniam igitur angulus ad c B
æqualis est angulo b k g: & angulus d a l in circulo æqualis angulo f h l: erit & C
angulus g k b angulo f h l æqualis. ergo ut b g ad g k, ita l f ad f h. est autem ut D
a g ad g b, ita h e ad e b: & ut h e ad e b, ita h f ad f a. Vt igitur a g ad g b, ita h f ad f a. Sed ut b g ad g k, ita alia quæpiam linea l f ad antecedentem f h. quare ex æquali in perturbata ratione, ut a g ad g k, ita l f ad f a. ut uero a g ad g k, ita quadratum a g ad rectangulum a g k, hoc est ad rectangulum b g c: & ut l f ad f a, ita rectangulum l f a, hoc est d f h ad quadratum f a. ergo ut quadratũ a g ad rectangulum b g c, sic rectangulum d f h ad f a quadratum.] Sed licet illud idem etiam per compositionem proportionum demonstrare. Quoniam enim proportio a g ad g b est eadem, quæ h e ad e b; hoc est h f ad f a: proportio autem a g ad g c eadem, quæ d e ad e c; hoc est d f ad f a: erit proportio cõposita ex proportione a g ad g b, & ex pro

Lem. in 22 decimi



portione a g ad g c, quæ quidem est quadrati a g ad rectangulum b g c, eadem, quæ
E componitur ex proportione h f ad f a: & ex proportione d f ad f a. hæc autem est proportio rectanguli d f h ad quadratum f a.

COMMENTARIVS.

A PONATVR rectangulo b g c æquale rectangulum a g κ: & rectangulo d f h æquale rectangulum a f l.] *Desiderantur ferè omnia hæc in græco codice, quæ nos supplemus; Illud uero ita intelligendum est, ut producatur a g ad K; & fiat rectangulum a g k rectangulo b g c æquale; & rursus producta a f ad l, fiat rectangulum a f l æquale rectangulo d f h.*

B Quoniam igitur angulus ad c æqualis est angulo b κ g: & angulus d a l in circulo angulo f h l.] *Ex uigesima prima tertij elementorum: sint enim puncta a b k c in circumferentia eiusdem circuli, cum rectangulum a g k æquale sit rectangulo b g c, ex conuersa trigesimæ quintæ eiusdem: & eadem ratione puncta a d l h cadent in circumferentia alterius circuli.*

C Erit & angulus g k b angulo f h l æqualis.] *Namq; angulus ad c angulo d a l est æqualis, quod b c, f a æquidistantes sint.* 29.primi.

D Ergo ut b g ad g k, ita l f ad f h.] *Sequitur enim ex iam dictis triangulum l f h triangulo b g k simile esse, quoniam angulus ad κ angulo f h l est æqualis; ut demonstratum fuit; & angulus l f h æqualis angulo l a g, hoc est ipsi b g κ. ergo & reliquus reliquo æqualis erit.* 29.primi.

E Hæc autem est proportio rectanguli d f h ad quadratum f a.] *Ex quibus fit ut rectangulum d f h ad quadratum f a eandem habeat proportionem, quam quadratum a g ad rectangulum b g c. quod quidem oportebat demonstrare.*

APOL-

APOLLONII PERGAEI CONICORVM LIBER I.

CVM COMMENTARIIS EVTOCII ASCALONITAE, ET FEDERICI COMMANDINI.

APOLLONIVS EVDEMO S. D.

SI ET corpore uales, & aliæ res tuæ ex animi tui ſententia ſe habent, bene eſt; nos quidem ſatis belle habemus. Quo tempore tecum Pergami fui, animaduerti te cupidum intelligendi conica, quæ à nobis conſcripta ſunt. Itaque miſi ad te primum librum emendatum; reliquos deinceps miſſurus, cum animo ero tranquilliori; non enim arbitror te oblitum, quod à me accepiſti, quid ſcilicet cauſæ fuerit, cur ego hæc ſcribere aggreſſus ſim, rogatus à Naucrate Geometra, quo tempore Alexandriam ueniens apud nos fuit: & cur nos cum de illis, octo libris egiſſemus, maiorem ſtatim in his diligentiam adhibuimus. Nam cum ipſe Naucrates quamprimum eſſet nauigaturus, nos ea non emendauimus, ſed quæcunque ſe ſe nobis obtulerunt conſcripſimus; vtpote qui ea poſtremo eſſemus percurſuri. Quamobrem nunc tempus nacti, ut quæque emendamus, ita edimus. Et quoniam accidit non nullos alios ex iis, qui nobiſcum fuerant, habuiſſe primum, & ſecundum librum antequam emendaretur, noli mirari ſi in quædam incidas, quæ aliter ſe habeant. Ex octo autem libris, quatuor primi huius diſciplinæ continent elementa: quorum primus quidem complectitur generationes trium coni ſectionum, & earum quæ oppoſitæ dicuntur; itemq; principalia ipſarum accidentia, à nobis & uberius & vniuerſalius, quam ab aliis, qui de ea re ſcripſerunt, elaborata. Secundus liber tractat ea, quæ attinent ad diametros, & ad axes ſectionum, & ad illas lineas, quæ cum ſectione non conueniunt, quæ à græcis ἀσύμπτωτοι appellantur: tum de aliis diſſerit, quæ & generalem & neceſſariam utilitatem ad determinationes afferunt. quas autem uocem diametros, & quos axes ex hoc libro cognoſces. Tertius liber continet multa, & admirabilia theoremata, quæ utilia erunt, & ad ſolidorum locorum compoſitiones, & ad determinationes. quorum complura, & pulcherrima & noua ſunt. Hæc nos perpendentes, animaduertimus non poſitam eſſe ab Euclide rationem componendi loci ad tres, & quatuor li-

Naucrates Geometra Alexandriam petens Apollonium ibi commorantem rogat ut hæc de conicis scribat.

neas; uerum ipsius tantummodo particulam quandam: atque hanc non satis feliciter. non enim fieri poterat, ut ea compositio recte perficeretur absque iis, quæ à nobis inuenta sunt. Quartus liber tradit, quot modis conorum sectiones inter se se, & circuli circumferentiæ occurrere possint; & multa alia ad pleniorem doctrinam, quorum nihil ab iis, qui ante nos fuerunt, memoriæ proditum est. coni sectio, & circuli circumferentia, & oppositæ sectiones ad quot puncta oppositis sectionibus occurrant. Reliqui autem quatuor libri ad abundantiorem scientiam pertinẽt. Quintus enim de minimis, & maximis magna ex parte agit. Sextus de æqualibus, & similibus coni sectionibus. Septimus continet theoremata, quæ determinandi uim habent. Octauus problemata conica determinata. At uero omnibus his editis, licet unicuiq; qui in ea legẽdo inciderit, ex animi sui sentẽtia iudicâre. Vale.

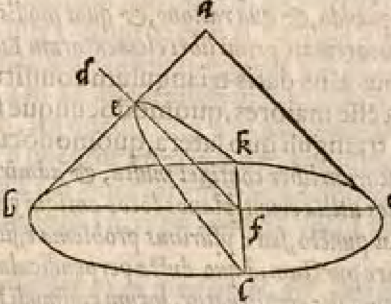
EVTOCII ASCALONITAE IN PRIMVM LIBRVM CONICORVM APOLLONII EX PROPRIA EDITIONE COMMENTARIVS.

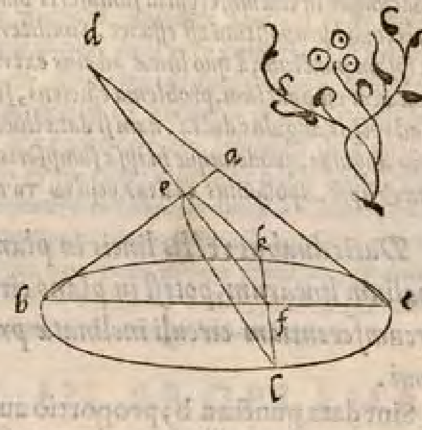
Perga Pamphiliæ Ciuitas Apollonij Patria, in qua Natus tempore Ptolomei Euergetis ex Heraclio in Archimedis Vita. De Apollonio ex Gemino in sexto Mathematicarum preceptionum Libro

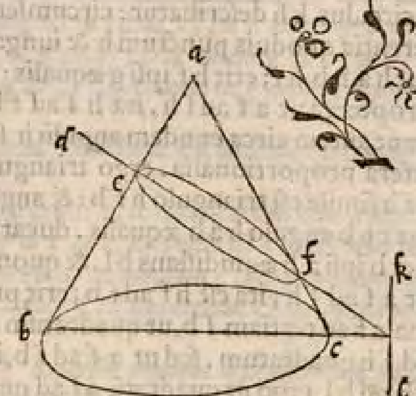
APOLLONIVS geometra, Anthemi sodalis charissime, natus est Pergæ, quæ Pamphiliæ ciuitas est, tempore Ptolemæi Euergetæ, ut tradit Heraclius in Archimedis uita. qui etiam scribit Archimedem quidem primum conica theoremata fuisse aggressum; Apollonium uero cum ea inuenisset ab Archimede nondum edita, sicut propria sua edidisse. neque id uere, ut mea fert opinio. nam & Archimedes multis in locis uelut antiquioris conicorum institutionis mentionem facere uidetur: & Apollonius ea scribit, non ut à se ipso inuenta. non enim dixisset, uberius & uniuersalius hæc à se, quam ab alijs tractata fuisse. Sed quod scribit Geminus uerum est. Antiqui, inquit, conum diffinientes, rectanguli trianguli circumuolutionem manente uno, eorum, quæ circa rectum angulum sunt, latere; & conos omnes rectos, & unam in singulis sectionem fieri arbitrati sunt: in rectangulo quidem cono uocatam parabolen; in obtusiangulo hyperbolen; in acutiangulo autem ellipsim; atq; ita nominatas apud ipsos sectiones passim inuenias. Quemadmodum igitur antiquis illis in unaquaq; triangulorum specie contẽplantibus duos rectos, primũ in æquilatero, deinde in æquicruri, postea in scaleno, ætate posteriores uniuersale theorema demonstrarunt eiusmodi. Omnis trianguli interiores tres anguli duobus rectis sunt æquales: *ita & in coni sectionibus; rectanguli quidem coni sectionem dictam, in rectangulo tantum cono contemplati sunt; secto scilicet plano ad unum coni latus recto: obtusianguli autem coni sectionem in cono obtusiangulo factam demonstrarunt, & acutianguli sectionem in cono acutiangulo; similiter in omnibus conis ducentes plana ad unum eorum latus recta. quod & antiqua sectionum nomina indicant. Verum postea Apollonius Pergæus uniuerse inspexit in omni cono tã recto, quàm scaleno omnes sectiones inesse, iuxta plani ad conum differentem inclinationem. quamobrem illius temporis homines admirati mirificam conicorum theorematum demonstrationem magnum geometram ipsum appellarunt. Hæc quidem Geminus scripta reliquit in sexto mathematicarum præceptionum libro. Quod autem dicit manifestum faciemus in subiectis figuris. sit enim per axem coni triangulum a b c: & à quouis puncto e ducatur ipsi a b ad angulos rectos linea d e f: & per d f immissum planum, rectum ad ipsam a b conum secet. rectus est igitur uterque angulus a e d, a e f: rectanguloq; existente cono, & angulo b a c recto, ut in prima figura apparet, duobus rectis æquales erunt anguli b a c, a e f. quare æquidistans erit linea d e f ipsi a c: & fiet in superficie coni sectio parabole, sic dicta ἀπὸ τοῦ παραβάλλειν, hoc est ab eo, quod linea d f, quæ communis sectio est plani secantis, & trianguli per axem,*

Parabole unde.

per axem, parallela sit ipsi a c lateri trianguli. sed si obtusiangulus sit conus, ut in secunda figura, obtuso uidelicet existente angulo b a c, & angulo a e f recto, anguli b a c, a e f duobus rectis maiores erunt, & non conueniet d e f cum ipso a c latere ad partes, in quibus est f: sed ad eas, in quibus sunt a, & e, producta nimirum c a in d. faciet igitur secans planum in superficie coni sectionem hyperbolen dictam ἀπὸ τοῦ ὑπερβάλλειν, hoc est ab eo, quod anguli b a c, a e f excedant duos rectos: uel quòd d e f excedat uerticem coni: & cum ipsa c a extra conueniat. Quod si acutiangulus sit conus, hoc est acuto existente angulo b a c, erunt anguli b a c, a e f minores duobus rectis; & lineæ e f, a c productæ conuenient tandem in aliqua parte: augere namque, & in longius ducere conum possumus. erit igitur in superficie sectio, quæ appellatur ellipsis, διὰ τὸ ἐλλείπειν δύο ὀρθαῖς τὰς προηρμένας γωνίας, hoc est ob id, quòd dicti anguli à duobus rectis deficiant, uel quod ellipsis diminutus quidam circulus sit. Ad hũc quidem modum antiqui ponentes secans planum per d e f ad rectos angulos ipsi a b lateri trianguli per axẽ coni, & insuper differentes conos, & propriam in unoquoque sectionem. At Apollonius ponens conum, & rectum & scalenum differenti ipsius plani occursu differentes efficit sectiones. Sit enim, ut in iisdem figuris, secans planum k e l: communis autem sectio ipsius plani, & coni basis, linea k l: communis rursus sectio eiusdem & trianguli a b c sit ipsa e f, quæ & diameter appellatur sectionis. itaque in omnibus sectionibus ponit lineam k l ad rectos angulos esse ipsi basi trianguli a b c. Verum si e f æquidistans sit a c, parabolen fieri k e l sectionem in coni superficie: si uero conueniat cum latere a c extra uerticem coni, ut in d, fieri ipsam k e l sectionem hyperbolen. quod si conueniat intra, fieri sectionem ellipsim, quam & θυρεὸν uocãt. Generaliter igitur parabolæ diameter æquidistans est uni lateri trianguli: hyperbolæ autem, & ellipsis diameter cum eo conuenit: hyperbolæ quidem ad partes uerticis coni, ellipsis uero ad partes basis. Scire præterea illud oportet, parabolen, & hyperbolen ex eorum numero esse, quæ in infinitũ augentur: at ellipsim non item. tota enim in se ipsam uergit, sicuti circulus. Cum autem plures editiones sint, ut etiam ipse Apollonius in epistola scribit: optimum fore iudicaui ex multis, quæ occurrerunt, manifestiora colligere: in ipsius uerbis quidem, ut legentibus ad hæc facilior pateret aditus: seorsum uero in commentariis, ut par est, differentes demonstrationis modos explicare. Itaque in epistola dicit, primos quatuor libros huius disciplinæ elementa continere: quorum primus quidem complectitur generationes trium coni sectionum, & earum, quæ oppositæ dicuntur, itemq; principalia ipsarum accidentia, hoc est quæcunque ipsis in prima generatione contingunt: habẽt enim & alia quædam consequentia. Secundus autem liber tractat ea, quæ attinent ad diametros, & ad axes sectionum, & ad illas lineas, quæ cum sectione non conueniunt, quæ à græcis ἀσύμπτωτοι appellantur: tum de aliis disserit, quæ & generalem, & necessariam utilitatem afferunt ad determinationes. determinatio autem duplex est, ut manifeste patet, altera quidem post expositionem, signifi-







Parabole unde

Hyperbole unde.

Ellipsis unde

Parabole quomodo fiat

Hyperbole.

Ellipsis.

Parabole & Hyperbole in infinitũ augétur.

ἀσύμπτωτοι

Determinatio duplex

cans quid sit illud, quod quæritur. altera uero propositionem uniuersalem esse probibens, quæ decla rat quando, & qua ratione, & quot modis, id quod propositum est, fieri possit, ut in uigesimo secun do theoremate primi libri elementorum Euclidis. Ex tribus rectis lineis, quæ æquales sint tribus alijs datis triangulum constituere: oportet autem duas eiusmodi lineas reliqua esse maiores, quomodocunque sumantur: quippe cum demonstratum sit, omnis trianguli duo latera, quomodocunque sumpta reliquo maiora esse. *Tertius, inquit, conicorum liber continet multa, & admirabilia theoremata, quæ ad solidorum locorum compositiones utilia erunt.*

loci plani. *Planos locos antiqui geometræ appellare consueuerunt, quando non ab uno dumtaxat puncto, sed à pluribus problema efficitur. ut siquis proponat, Data recta linea terminata, inuenire punctum, à quo ducta perpendicularis ad datam lineã, inter ipsius lineæ partes media proportionalis constituatur. locum eiusmodi uocant geometræ, quoniam non unum dumtaxat est punctum, quod problema efficit, sed locus totus, quem habet circumferentia circuli circa datam rectã lineam, ueluti circa diametrum descripti. si enim in data recta linea semicirculus describatur; quodcunque in circumferentia sumpseris punctum, & ab ipso perpendicularem ad diametrum duxeris, quod propositum est efficiet. Similiter autem data recta linea, si quis proponat inuenire extra ipsam punctum, à quo lineæ ad eius extrema ductæ inter se æquales sint: & in hoc non unum dumtaxat est punctum, problema efficiens, sed locus, quem continet linea, à puncto medio lineæ datæ ad rectos angulos ducta. nam si data linea bifariam secetur, & ab eo puncto linea ad rectos ducatur angulos, quodcunque in ipsa sumpseris punctum faciet illud, quod proponebatur. Simile quiddam & ipse Apollonius ἐν ἀναλυομένῳ τόπῳ scribit.*

Datis duabus rectis lineis in plano, punctisq; datis, & data proportione inæqualium linearum, potest in plano circulus describi, ita ut lineæ à datis punctis ad circumferentiam circuli inclinatæ proportionem habeant eandem datæ proportioni.

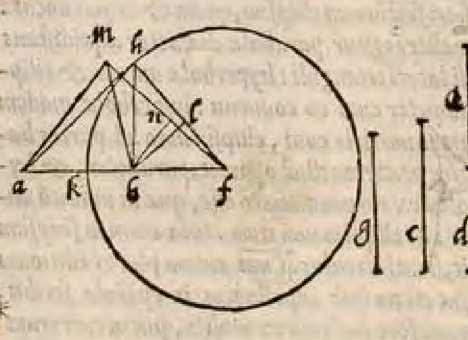
Sint data puncta a b; proportio autem data, quam habet c ad d: sitque c maior: & oporteat facere illud, quod propositum est. iungatur a b: & ad partes b producatur: & fiat ut d ad c, ita c ad aliam lineam, quæ maior erit, quam d: sit autem e d. rursus fiat ut e ad a b, ita d ad b f, & c ad g. patet igitur lineam c proportionalem esse in-

A ter d & e d: itemq; g proportionalem inter a f, f b. quare si ex centro f, & interuallo g circulus k h describatur: circumferentia k h lineam a b secabit. Sumatur in circũferentia quoduis punctum h: & iungantur h a, h b, h f; erit h f ipsi g æqualis: & propterea ut a f ad f h, ita h f ad f b. Sunt autem circa eundem angulũ h f b

6.sexti. latera proportionalia. ergo triangulũ a f h simile est triangulo h f b: & angulus f h b angulo h a b æqualis. ducatur per b ipsi a h æquidistans b l. & quoniã

cor.20.sexti ut a f ad f h, ita est h f ad f b; erit prima a f ad tertiam f b, ut quadratum a f

4.sexti. ad f h quadratum. sed ut a f ad f b, ita a h ad b l. ergo ut quadratũ a f ad quadratum f h, ita a h ad b l. Rursus, quo-



29.primi. niam angulus b h f æqualis est angulo h a b: & angulus a h b angulo h b l æqualis, coalterni enim sunt: & reliquus reliquo æqualis erit: & triangulum a h b simile trian-

4.sexti. gulo b h l. quare latera, quæ circum æquales angulos, proportionalia sunt: uidelicet ut a h ad h b, ita h b ad b l: & ut quadratum a h ad quadratum h b, ita a h ad b l. erat autem ut a h ad b l, ita quadratum a f ad quadratum f h. ut igitur quadratũ a f ad qua-

22 sexti. dratum f h, ita quadratum a h ad quadratum h b. & idcirco ut a f ad f h, ita a h ad

B h b. Sed ut a f ad f h, ita e d, ad c, & c ad d. ergo ut c ad d, ita a h ad h b. Similiter ostendemus omnes alias lineas, quæ à punctis a b ad circumferentiam circuli inclinantur eandem proportionem habere, quam habet c ad d. itaque dico si à punctis a b ducantur

Insuper

cantur lineæ ad aliud, quod non sit in circumferentia circuli: ipsarum non eandem esse proportionem, quæ est c ad d. nam si esse potest, factum iam illud sit ad pũctum m, quod extra circumferentiam sumatur (eo enim intra sumpto idem absurdum sequetur) & iunctis m a, m b, m f, ut est c ad d, ita ponatur a m ad m b. ergo ut e d ad d, ita C
quadratum e d ad quadratum c; & quadratum a m ad quadratum m b. ut autem e d D
ad d, ita posita est a f ad f b. quare ut a f ad f b, ita quadratum a m ad quadratum m b: & ex iis quæ proxime dicta sunt, si à puncto b ducatur linea ipsi a m æquidistans; E
ut a f ad f b, ita demonstrabitur quadratum a f ad f m quadratum. Sed demonstratum est ut a f ad f b, ita quadratum a f ad quadratum f h. ergo linea f h ipsi f m est 9. quinti
æqualis. quod fieri non potest.

Loci igitur plani eiusmodi sunt. solidi uero loci appellantur ex eo quod lineæ, per quas ipsorum problemata efficiuntur, à solidorum sectione generationem habent, quales sunt coni sectiones, & complures aliæ. Sunt etiam alij loci ad superficiem dicti, quibus ex eorum proprietate nomen impositum est. Inuehitur deinde Apollonius in Euclidem, non ut Pappus & alij non nulli arbitrantur, quòd duas medias proportionales non inuenerit: siquidem Euclides recte inuenit unam mediam proportionalem, non infæliciter, ut ipse inquit: duas uero proportionales medias neque omnino in elementis inuestigare aggressus est, & Apollonius de duabus medijs proportionalibus in tertio libro nihil inquirere uidetur. Sed uerisimile est Euclidem in alio libro de locis conscripsisse, qui ad manus nostras non peruenerit. Quæ uero deinceps subiungit de quarto libro perspicua sunt. Quintus, inquit, liber de minimis & maximis magna ex parte agit. Quemadmodum enim in elementis didicimus, si ab aliquo puncto in circulum lineæ ducantur, earum quidem, quæ ad concauam ipsius circumferentiam pertinent, maximam esse quæ per centrum transit; earum uero, quæ ad conuexam, minimam esse, quæ inter dictum punctum, & diametrum interijcitur: ita & de coni sectionibus in quinto libro inquirit. Sexti, septimi, & octaui libri propositum manifeste ab ipso Apollonio explicatur. & hæc de epistola dicta sint.

Loci solidi

Aliter idem ex Galilæo.

FED. COMMANDINI IN PROBLEMA APOLLONII COMMENTARIVS.

Itemque g proportionalem inter a f, f b] *Quoniam enim ut d ad b f, ita est c ad g;* A
erit permutando ut d ad c, ita b f ad g: rursus quoniam ut e ad a b, ita d ad b f ex 12. quinti, e d ad a f erit, ut d ad b f. Sed ut d ad b f, ita c ad g: ergo e d ad a f, ut c ad g: & permutando e d ad c, ut a f ad g: conuertendoq; c ad d e, ut g ad a f; erat autem d ad c, ut b f ad g: & ut d ad c, ita c ad d e: quare ut b f ad g, ita g ad a f: & propterea g media proportionalis est inter a f, f b. quod demonstrare oportebat.

Sed ut a f ad f h, ita e d ad c.] *Proxime enim ostendimus e d ad c ita esse, ut a f ad* B
g; hoc est ad f h ipsi g æqualem.

Ergo ut e d ad d ita quadratum e d ad quadratum c, & quadratum a m ad qua- C
dratum m b.] *Nam ut e d ad c, ita est c ad d: & ut c ad d, ita posita est a m ad m b: quare ut e d ad c, ita a m ad m b: & ideo ut quadratum e d ad quadratum c, ita quadratum a m* 22. sexti
ad quadratum m b; ut igitur e d ad d, ita est quadratum e d ad quadratum c, & quadratum 20. sexti
a m ad quadratum m b.

Vt autem e d ad d, ita posita est a f ad f b.] *Superius namque demonstratum est, ut* D
e d ad a f, ita esse d ad b f. quare & permutando ut e d ad d, ita a f ad f b.

Et ex iis quæ proxime dicta sunt, si à puncto b ducatur linea ipsi a m æquidi- E
stans: ut a f ad f b, ita demonstrabitur quadratum a f ad f m quadratum.] *Ducatur per b ad m f linea b n, quæ ipsi a m æquidistet; erit ob similitudinem triangulorum a m f,*
b n f, ut a f ad f b, ita a m ad b n. Itaque quoniam ut a f ad f b, sic est quadratum a m ad 4. sexti
quadratum m b; & sic quadratum a f ad quadratum f b: erit quadratum a m ad quadratum
m b, ut quadratum a f ad f b quadratum: & propterea linea a m ad m b, ut a f ad f b: con- 22. sexti
uertendoque m b ad a m, ut f b ad a f. erat autem a m ad b n, ut a f ad f b. quare ex æquali m b ad b n, ut b f ad f b: sed est a m ad m b, ut a f ad f b: & ut a f ad f b, ita b f ad f b: ergo
ut a m ad m b, ita m b ad b n. Quoniam igitur circa æquales angulos a m b, m b n latera pro- 29. primi

6. sexti *portionalia sunt: erit triangulum abm simile triangulo mnb: & angulus bam æqualis angulo nmb. sed triangulorum amf, mbf angulus fam est æqualis angulo fmb: & angulus ad f utrique communis. ergo & reliquus reliquo æqualis, & triangulum triangulo simile* 4. sexti *erit. quare ut af ad fm, ita est fm ad fb. ut igitur prima af ad fb tertiam, ita quadra-* cor. 20. sexti. *tum af ad fm quadratum.*

DIFFINITIONES PRIMAE.

A 1 SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in utramque partē producatur: & manente puncto conuertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri: superficiem à recta linea descriptam, constantemq; ex duabus superficiebus, ad uerticem inter se se aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, (nimirum recta linea, quæ eam describit in infinitum producta) uoco conicam superficiem. 2 Verticem ipsius, manens punctum. 3 Axem, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur. 4 Conum autem uoco, figuram contētam circulo, & conica superficie, quæ inter uerticem, & circuli circumferentiam interiicitur. 5 Verticem coni, punctum, quod & superficiei conicæ uertex est. 6 Axem, rectā lineam, quæ à uertice ad circuli centrum perducitur. 7 Basim, circulum ipsum. 8 Conorum rectos quidem uoco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus. 9 Scalenos uero, qui non ad rectos angu-
B los ipsis basibus axes habent. 10 Omnis curuæ lineæ, in uno plano existentis diametrum uoco rectam lineam, quæ quidem ducta à linea curua; omnes lineas, quæ in ipsa ducuntur, cuidam lineæ æquidistantes bifariam diuidit. 11 Verticem lineæ terminum rectæ, qui est in ipsa linea. 12 Ordinatim ad diametrum applicari dicitur, unaquæque linea-
C rum æquidistantium. 13 Similiter & duarum curuarum linearum in uno plano existentium, diametrum quidem transuersam uoco, rectam lineam, quæ omnes in utraque ipsarum ductas, lineæ cuidam æquidistantes bifariam diuidit. 14 Vertices linearum, diametri terminos, qui sunt in ipsis lineis: 15 Rectam uero diametrum uoco, quæ inter duas lineas posita, lineas omnes ductas, rectæ cuidam æquidistantes, & inter ipsas interiectas bifariam secat. 16 Ordinatim ad diametrum applicari dicitur unaquæque linearum æquidistantium. 17 Coniugatas diametros uoco curuæ lineæ & duarum curuarum, rectas lineas, quarum utraque diameter est, & lineas alteri æquidistantes bifariam diuidit. 18 Axem uero curuæ lineæ, & duarum curuarum, rectam lineā, quæ cum sit diameter curuæ lineæ, uel duarum curuarum, æquidistantes ad rectos secat angulos. 19 Axes coniugatos curuæ lineæ, & duarum curuarum, rectas lineas, quæ cum sint diametri coniugatæ, ipsis æquidistantes ad rectos angulos secant.

EVTO

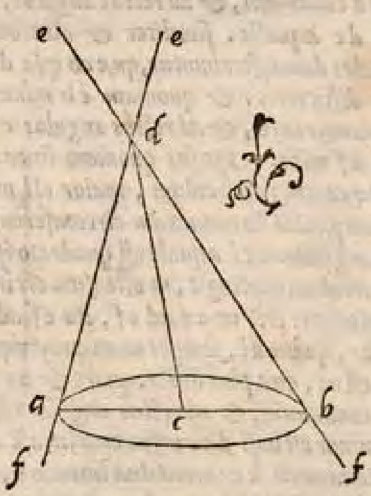
EVTOCIVS.

AGGRESSVS ad diffinitiones Apollonius tradit generationem conicæ ſuperficiei, non diffinitionem, quæ, quid res ſit, declarat: quamquam licebit utique ijs, qui uolent, & ex generatione ipſa diffinitionem colligere. At uero nos ijs, quæ ab Apollonio dicuntur, ex figuris lucem afferemus.

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli: &c. A

Sit circulus a b, cuius centrum c: & punctum aliquod ſublime d: iunctáque d b in infinitum ex utraque parte producatur ad puncta e f. Si igitur recta linea d b feratur eo uſque in circuli a b circumferentia, quouſque punctum b rurſus in eum locum reſtituatur, à quo cœpit moueri: deſcribet ſuperficiem quandam, quæ quidem conſtat ex duabus ſuperficiebus, ad d punctum ſe ſe tangentibus. eam uoco conicam ſuperficiem; quæ & augetur in infinitum, cum recta linea d b, ipſam deſcribens in infinitum producitur. uerticem ſuperficiei dicit, punctum d: axem, rectam d c. conum uero appellat figuram contentam circulo a b, & ea ſuperficie, quam d b ſola deſcribit: coni uerticem punctum d: axem d c: & baſim, a b circulum. At ſi d c ad circulum, fuerit perpendicularis, rectum uocat conum; ſin minus, ſcalenum.

Deſcribetur autem conus ſcalenus, quando à centro circuli linea erigatur, quæ non ſit perpendicularis ad circuli planum: à puncto uero lineæ, quod eſt in ſublimi ad circuli circumferentiam recta linea ducatur: & manente puncto circa ipſam conuertatur: compræhenſa etenim figura conus erit ſcalenus. conſtat igitur lineam circumductam in conuerſione quandoque maiorem; quandoque minorem, & quandoque æqualem fieri, ad aliud, atque aliud circuli punctum. quod tamen nos hoc modo demonſtrabimus.

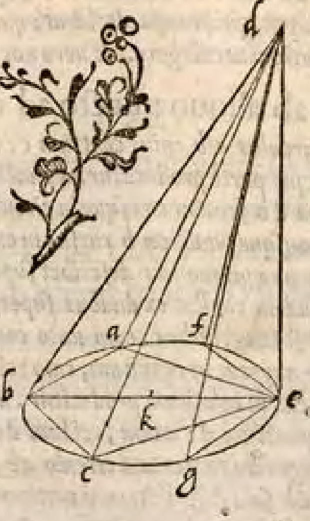


Si à uertice coni ſcaleni ad baſim rectæ lineæ ducantur; earum omnium una minima, & una maxima erit, duæ uero tantum ex utraque parte minimæ & maximæ inter ſe æquales. At quæ propinquior eſt minimæ ſemper minor erit, quam quæ ab ipſa magis diſtat.

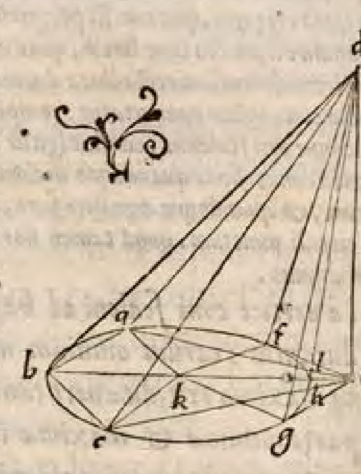
Sit conus ſcalenus, cuius baſis a b c circulus, uertex autem punctum d. & quoniam linea, quæ à uertice coni ſcaleni ad ſubiectum planum perpendicularis ducitur, uel in circumferentiam circuli a b c cadit, uel extra, uel intra. cadat primum in ipſam circumferentiam, ut in prima figura apparet, quæ ſit d e: ſumptóq; circuli centro k, ab ipſo e ad k ducatur linea e k, & producatur ad b. iungatur autem b d: & ex utraque parte puncti e ſumantur duæ circumferentiæ æquales f e, e g: itemq; ex utraque parte b ſumantur aliæ duæ æquales a b, b c: & iungantur f e e g, d f, d g, a e, e c, a b, b c, d a, d c. Quoniam igitur recta linea e f æqualis eſt ipſi e g: æquales enim circumferentias ſubtendunt: communis autem, & ad rectos angulos d e: erit baſis d f baſi d g æqualis. rurſus quoniam circumferentia a b æqualis eſt ipſi b c circumferentiæ, & eſt b e diameter circuli: reliqua e f a reliquæ e g c æqualis erit. quare & recta linea a e ipſi e c. Sed d e communis eſt utrique, & ad rectos angulos. baſis igitur a d æqualis eſt baſi d c. Similiter autem demonſtrabuntur inter ſe æquales, quæcunque ab ipſa d e, uel d b æqualiter diſtant. Rurſus quoniam triangulum eſt e d f, & angulus d e f rectus, linea d f, maior erit, quàm d e. & quoniam recta linea a e maior eſt, quam recta e f, quòd & circumferentia e f a maior; quàm

29. tertii
4. primi
18. primi

ex 47. primi ipsa e f circumferentia: communis uero & ad rectos angulos d e: basis d f minor erit, quàm d a. eadem quoque ratione, & d a minor, quàm d b. Quod cum ostensa sit d e minor, quàm d f; itemq; d f minor, quàm d a, & d a minor, quàm d b: sequitur ipsam d e minimam esse; d b uero maximam: & quæ propinquior est ipsi d e semper minorem esse, quàm quæ ab ipsa magis distat. Sed cadat perpendicularis d e extra circulum a b c g f, ut in secunda figura: & rursus sumatur circuli centrum K: iunctaque e h K producatur ad b: & iungantur d b, d h. Sumantur præterea duæ circumferentiæ æquales ex utraque parte puncti h, quæ sint f h, h g: & ex utraque parte ipsius b aliæ duæ sumantur a b b c. postremo iungantur e f, e g, f K, K g, d f, d g, a b, b c, a K, K c, d a, d c. itaq; quoniam æqualis est cir-



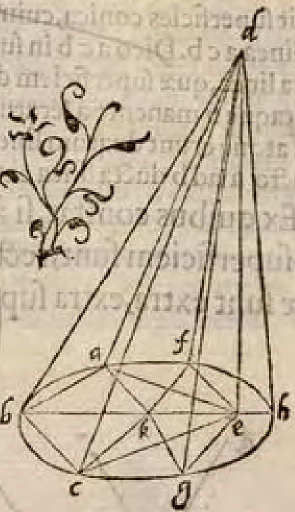
27. tertii. cumferentia h f ipsi h g: & angulus h K f angulo h K g æqualis erit. Sed recta linea f K rectæ K g est æqualis, ex centro enim ad circumferentiam ducuntur: & commu-
8. primi nis K e. ergo basis f e æqualis basi g e. est autem communis, & ad rectos angulos d e. basis igitur d f basi d g est æqualis. Rursus quoniam circumferentia b a æqualis est circumferentiæ b c: & angulus a K b ipsi c K b, &
13. primi. reliquus ex duobus rectis a K e reliquo c K e æqualis erit. lineæ autem a K, K c inter se æquales, ex centro enim sunt; & communis ipsa k e. ergo & a e basis æqualis basi c e. Rursus cum sit d e communis, & ad rectos angulos, & d a basis erit basi d c æqualis. similiter & aliæ omnes ad inuicem æquales demonstrabuntur, quæ ab ipsa d b, uel d h æqualiter distiterint. & quoniam e h minor est, quàm e f: communis uero, & ad rectos angulos e d, erit basis d h
8. tertii basi d f minor. Rursus quoniam linea, quæ à puncto e ducta contingit circulum, maior est omnibus, quæ ab eodem puncto in conuexam circumferentiam cadunt: &
36. tertii rectangulum a e l æquale est quadrato ipsius e f, quando e f circulum contingit, ut ostensum est in tertio libro ele-
14. sexti mentorum: erit ut a e ad e f, ita e f ad e l. est autem e f
8. tertii maior, quàm e l, semper enim propinquior minimæ mi-
14. quinti nor est ea, quæ plus distat. quare & a e maior quàm e f. Sed communis, & ad rectos angulos est e d. basis igitur d f minor est basi d a. rursus cum sit a k æqualis ipsi k b, & communis k e: erunt duæ lineæ a k, k e duabus e k,



20. primi k b, hoc est toti e b æquales. Sed duæ a k, k e maiores sunt, quàm e a. ergo & b e maior quàm a e. communis autem d e, & ad rectos angulos. quare basis d a minor est basi d b. Itaq; cum d h minor sit, quàm d f; & d f minor, quàm d a; & d a, quàm d b: minima erit d h; d b uero maxima: & ipsi d h propinquior semper minor erit, quàm quæ magis distat.

Postremo cadat perpendicularis d e intra circulum a b c g f, ut in tertia figura: sumptoq; circuli centro k; & iuncta e k producatur in utramque partem ad puncta b h: & iungantur d h, d b. sumantur autem ex utraque parte puncti h circumferentiæ æquales f h, h g: & ex utraque parte b sumantur a b b c: denique iungantur e f, e g, f k, k g, d f, d g, k a, k c, e a, e c, d a, d c,
27. tertii a b, b c. Quoniam igitur h f circumferentia æqualis est circumferentiæ h g: & angulus h k f
4. primi angulo h k g est æqualis: linea uero k f æqualis ipsi k g: & k e communis. ergo & f e basis basi g e æqualis erit. Sed est d e communis: & angulus f e d rectus æqualis recto g e d. quare & basis d f basi d g æqualis. rursus cum circumferentia a b æqualis sit circumferentiæ b c; angulus a k b angulo c k b æqualis erit. ergo & reliquus ex duobus rectis a k e reliquo c k e. est autem linea a k æqualis k c: & communis k e. basis igitur a e basi c e æqualis. Sed cum d e communis sit: & angulus a e d æqualis angulo c e d, quod uterque rectus: erit & basis d a basi d c æqualis.

æqualis. Eodem modo & omnes, quæ æqualiter distant ab ipsa d b, uel d h inter se æquales demonstrabuntur. Itaque quoniam in circuli a b c diametro sumitur punctum e, quod non est centrum circuli, erit e b maxima, e h uero minima: & semper ipsi e h propinquior minor ea, quæ distantior fuerit. quare e h minor, quàm e f. at e d communis est, & ad rectos angulos. basis igitur d h 7.tertii * *minor basi d f. rursus cum e f minor sit, quàm e a, communisq;, & ad rectos angulos e d: basis d f basi d a minor erit. & eadem ratione basis d a minor, quàm d b ostendetur. Quoniam igitur minor est d h, quàm d f: & d f quàm d a; & d a quàm d b: minima erit d h, & d b maxima: & propinquior ipsi d h semper minor ea, quæ magis distat.*

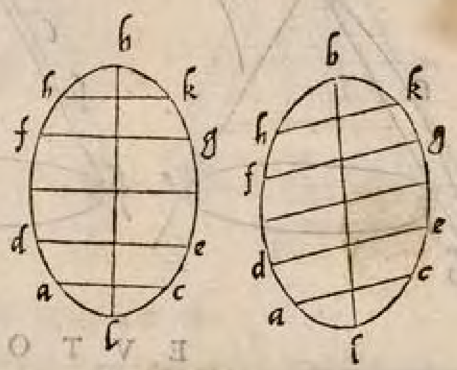


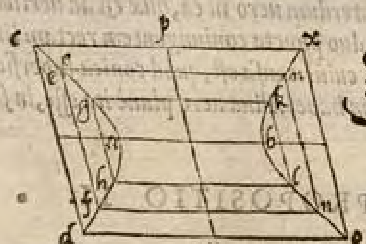
Omnis curuæ lineæ in uno plano existentis diametrum uoco rectam lineam &c.

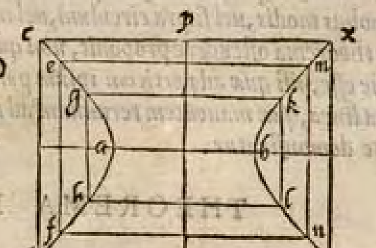
In uno plano dixit propter helicam cylindri & sphæræ: hæ enim non sunt in uno plano. Quod autem dicit eiusmodi est. sit curua linea a b c: & in ea æquidistantes a c, d e, f g, h k: à puncto autem b ducatur b l recta linea, quæ ipsas æquidistantes bifariam secet. lineæ igitur a b c diametrum, inquit, uoco rectam lineam b l: & uerticem punctum b. ordinatim uero ad ipsam b l applicari dicitur unaquaque linearum a c, d e, f g, h K. Quod si b l æquidistantes bifariam, & ad rectos angulos secet, axis appellatur.

Similiter & duarum curuarum linearum, &c.

Si enim intellexerimus lineas a b, & in ipsis æquidistantes c d, e f, g h, K l, m n, x o: & diametrum a b ex utraque parte productam, quæ bifariam æquidistantes diuidat: ipsam quidem a b uoco diametrum transuersam: uertices linearum puncta a b: ordinatim uero ad a b diametrum applicari dicuntur c d, e f, g h, K l, m n, x o. At si bifariam, & ad rectos angulos diuidat, trãsuersus axis appellabitur. Si uero recta linea, ut p r ducta lineas c x, e m, g K, h l, f n, d o, ipsi a b æquidistãtes bifariam secet: recta diameter dicitur. Ordinatim ad p r diametrum applicatur unaquæque linearum c x, e m, g K, h l, f n, d o. si bifariam, & ad rectos angulos secet, rectus axis dicetur. At uero si rectæ lineæ a b, p r ipsis æquidistantes bifariam secuerint, coniugatæ diametri. Quòd si bifariam, & ad rectos angulos, coniugati axes uocabuntur.







THEOREMA I. PROPOSITIO I.

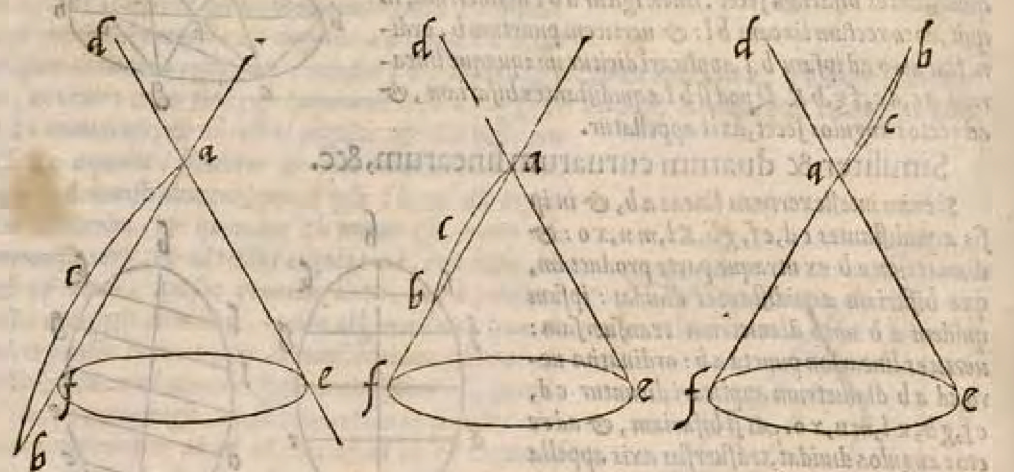
Rectæ lineæ, quæ à uertice superficiei conicæ ad puncta, quæ in superficie sunt, ducuntur; in ipsa superficie erunt.

Sit superficies conica, cuius uertex a: & sumpto in ea aliquo puncto b, iungatur recta linea a c b. Dico a c b in superficie esse. Si enim fieri potest, non sit in superficie: & recta linea, quæ superficiem describit, sit d e: circulus autem, in quo ipsa d e fertur, sit e f. itaque si manente a feratur d e in e f circuli circumferentia, per b punctum transibit:* atque erunt duarum linearum rectarum ijdem termini, quod est absurdum. non igitur à puncto a ad b ducta linea extra superficiem est. ergo in ipsa superficie erit.

* cum sit per hypothesin in superficie conica.

Coroll: Ex quibus constat, si à uertice ad aliquod punctum eorum, quæ intra superficiem sunt, recta linea ducatur, intra: & si ad aliquod eorum, quæ sunt extra, extra superficiem cadere.

23



EVTOCIVS.

De figuris differentibus, uel casibus theorematum illud scire oportet, casum esse, quádo ea, quæ in propositione dantur, positione data sint. ipsorum enim differens transmutatio, eadem conclusione manente, casum facit. similiter autem & à constructione transposita fit casus. cum igitur theoremata plures casus habeant, una eadémq; demonstratio omnibus congruit, & iisdem elementis: præter quàm in paucis quibusdam, ut deinceps explicabimus. Statim namque primum theorema tres habet casus, propterea quòd punctum b interdum quidem in superficie inferiori sumitur, & hoc duobus modis, uel supra circulum, uel infra: interdum uero in ea, quæ est ad uerticem. primum igitur theorema ostendere proponit, non quælibet duo puncta coniungentem rectam lineam in superficie esse, nisi quæ ad uerticem ipsum pertineat. cuius causa est, quòd conica superficies, efficitur à recta linea, quæ manentem terminum ad uerticem habet. Illud uero planè ita esse, in secundo theoremate demonstratur.

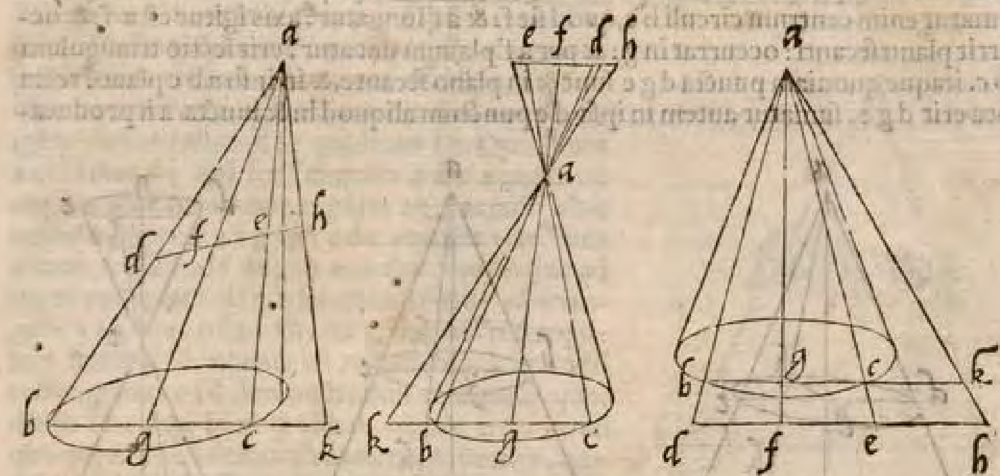
THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si in alterutra superficierum, quæ sunt ad uerticem, duo puncta sumantur: & quæ puncta coniungit recta linea ad uerticem non pertineat, intra superficiem cadet: quæ uero est in directũ ipsi, cadet extra.

Sit

Sit conica superficies, cuius uertex quidem a; circulus autem, in quo fertur linea superficiem describens, sit b c: & in alterutra superficierum, quæ sunt ad uerticem, sumptis duobus punctis d e, linea d e ducatur, quæ ad punctum a non pertineat. Dico ipsam d e intra superficiem cadere: & quæ est in directum ipsi, cadere extra. Iungantur a d, a e, & producantur.* cadent utique in circuli circumferentiam. cadant in puncta b c: & iungatur b c.* erit igitur b c intra circulum. quare & intra conicam superficiē. sumatur in ipsa d e quoduis punctum f: iunctaq; a f producatur. cadet in lineam b c: *nam triangulum b c a in uno plano existit. itaque cadat in g. quoniam igitur punctū g est intra conicam superficiem:* & ipsa a g; & punctum f intra conicam superficiem erit. similiter autem demonstrabuntur & omnia alia puncta lineæ d e esse intra conicam superficiem. ergo & ipsa d e intra eandem cadet. producatur d e ad h. dico lineā e h extra conicam superficiem esse. si enim fieri potest, aliquod ipsius punctum h non sit extra; & iuncta a h producatur.* cadet in ipsam circuli circumferentiam, uel intra; quod fieri non potest. cadit enim in lineam b c protractam, ut in k. quare e h extra conicam superficiem erit. linea igitur d e cadet intra conicam superficiem: & quæ est in directum ipsi, extra cadet.

1. huius
2. tertii cum totus circ.ur sit intra conicam superficiem
2. undecimi.
cor. 1. huius
per cor. 1. huius.



EVTOCIVS.

SECVNDVM theorema tres habet casus, propterea quod puncta d e sumuntur quandoque in superficie secundum uerticem, quandoque in inferiori: & id dupliciter, uel intra circulum, uel extra. Sciendum autem est in quibusdam exemplaribus totum hoc theorema per argumentationem, quæ deducit ad id, quod fieri non potest, demonstrari.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si conus plano per uerticem secetur, sectio triangulum erit.

Sit conus, cuius uertex a; basis autem circulus b c: & per a secetur plano aliquo, quod sectiones faciat in superficie a b, a c lineas; & in basi lineam b c. Dico a b c triangulum esse. Quoniam enim à puncto a ad b ducta linea communis sectio est plani secātis, & superficiei conicæ, erit a b recta linea. Eadem ratione & ipsa a c.* est autem & b c recta. quare triangulum est a b c. si igitur conus plano secetur per uerticem, sectio triangulum erit.

3. undecimi.

Secto Cono, plano per verticem utcūque ducto erit semp triangulum

Aliter, et clarius.

Dico has lineas esse rectas. Quoniam enim punctum b. communis sectio plani secantis, et circumferentię basis, est et in plano secante, et in superficie conica, si eum vertice a ~~ipsum~~ iungatur recta linea, erit hęc, tota in plano secante (cum ipsius extrema sint in eodem plano) et tota in superficie conica, per p.m huius, ergo in communi sectione, et

Coroll.

Hinc, si Conus plano per axem secetur, sectio itidem triangulum erit: nam axis Coni per verticem transit. ex definitione 6.

C

EVTOCIVS.

Tertium theorema caſum non habet. oportet autem ſcire lineam a b rectam eſſe, cum ſit cõmunis ſectio plani ſecantis & ſuperficiei conicæ, quæ à recta linea manentem terminum ad uerticẽ habente, deſcribitur. neque enim omnis ſuperficies ſecta plano ſectionem facit rectam lineam: neq; ipſe conus, niſi planum ſecans per uerticem tranſeat.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

SI alterutra ſuperficierum, quæ ſunt ad uerticem plano ſecetur, æquidiſtante circulo, per quem fertur recta linea ſuperficiem deſcribens: planum, quod ſuperficie concluditur, circulus erit, centrum in axe habens: figura uero contenta circulo, & ea parte ſuperficiei conicæ, quæ inter ſecans planum & uerticem interiicitur, conus erit.

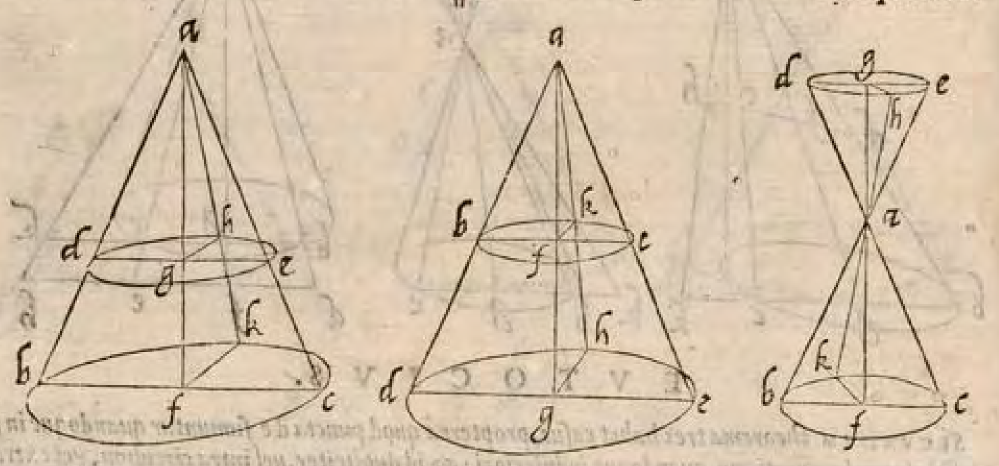
SIT conica ſuperficies, cuius uertex a: circulus autem, in quo fertur recta linea ſuperficiem deſcribens, b c: & ſecetur plano ipſi circulo b c æquidiſtante; quod ſectionem faciat in ſuperficie lineam d e. Dico d e circulum eſſe, qui centrum in axe habet. Sumatur enim centrum circuli b c, quod ſit f: & a f iungatur*: axis igitur eſt a f: & occurrit plano ſecanti: occurrat in g: & per a f planum ducatur*: erit ſectio triangulum a b c. itaque quoniam puncta d g e ſunt & in plano ſecante, & in ipſo a b c plano*: recta linea erit d g e. ſumatur autem in ipſa d e punctum aliquod h: & iuncta a h producatur, quæ circumferentiæ b c occurrat in k: iunganturq; g h, f k. & quoniam duo plana d e, b c æquidiſtantia à plano a b c ſecantur*, communes ipſorum ſectiones æquidiſtantes erunt. æquidiſtat igitur linea d e ipſi b c. & eadem ratione g h ipſi f k.* quare ut f a ad a g, ita f b ad d g; f c ad g e; & f k ad g h: ſuntq; tres lineæ b f, f k, f c æquales inter ſe. ergo & ipſæ tres d g, g h, g e inter ſeſe æquales erunt. ſimiliter quoque oſtẽdentur æquales quæcunque à puncto g ad lineam d e ducuntur*. circulus igitur eſt linea d e, centrum in axe habens.

Dico planum à linea d e k conclusum circulum esse,

6. diff. huius.

3. huius

3. undecimi.



16. undecimi

4. ſexti.

15. def. primi

planum

Coroll: Conſtat præterea figuram contentam circulo d e, & ea parte ſuperficiei conicæ, quæ inter dictum circulum, & punctum a interiicitur, conum eſſe: ſimulq; demonſtratum eſt communem ſectionem plani ſecãtis, & trianguli per axem diametrum eſſe ipſius circuli.

EVTOCIVS.

Casvs huius theorematis tres ſunt, quemadmodum & præcedentis & ſecundi.

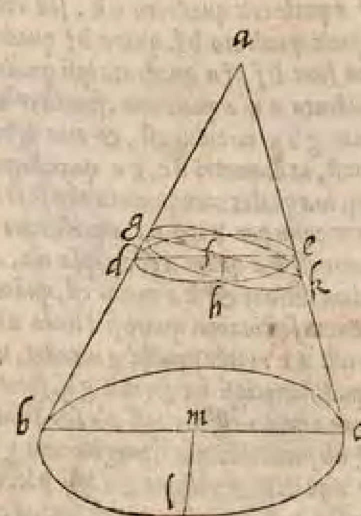
THEO-

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

SI conus ſcalenus plano per axem ſecetur ad rectos angulos ipſi baſi; ſeceturq; altero plano ad triangulum per axem recto, quod ex uerticis parte triangulum abſcindat ſimile ei, quod per axem, ſubcontrarie uero poſitum: ſectio circulus erit. uocetur autem huiuſmodi ſectio ſubcontraria.

Secrio subcontraria quæ?

Sit conus ſcalenus, cuius uertex a punctum; baſis circulus b c: & ſecetur plano A
per axem, ad circulum b c recto, quod faciat ſectionem triangulum a b c. ſecetur au- B
tem, & altero plano ad rectos angulos ipſi a b c, quod ex parte a triangulum abſcin-
dat a g k triangulo a b c ſimile, ſub contrarie uero poſitum; ut uidelicet angulus a k g
æqualis, ſit a b c angulo: & faciat ſectionem in ſuperficie lineam g h k. Dico ipſam
g h k circulum eſſe. Sumantur enim in lineis g h k, b c puncta quæpiam h l: à qui-
bus ad planum, quod per triangulum a b c tranſit, perpendiculares ducantur: ca-
dent hæ in communes planorum ſectiones. cadant ut h f, l m. æquidiſtans eſt igitur 38. unde. 6. undec.
h f ipſi l m. ducatur autem per f ipſi b c æquidi-
ſtans d f e. ergo planum, quod per f h, d e tranſit 15. unde.
æquidiſtans eſt baſi ipſius coni: & idcirco ſectio 4. huius et eiusdem coroll.
d h e circulus erit, cuius diameter d e. æquale eſt 8. & 17. ſexti.
igitur rectangulum d f e quadrato f h. Quòd cum
æquidiſtet d e ipſi b c, angulus a d e æqualis eſt
angulo a b c. & ponitur angulus a k g angulo a b c 29. primi
æqualis. ergo & a k g ipſi a d e æqualis erit. ſunt
autem & qui ad f anguli æquales, quòd ſint ad
uerticem. quare d f g triangulum ſimile eſt trian- 15. primi.
gulo k f e. & ut e f ad f k, ita g f ad f d. rectangu- 4. ſexti
lum igitur e f d æquale eſt rectangulo k f g. Sed 16. ſexti
rectangulum e f d demonſtratum eſt æquale qua- C
drato f h. ergo & k f g eidem æquale erit. ſimili
quoque ratione demonſtrabuntur & omnes, quæ
à linea g h k ad ipſam g k perpendiculares ducun-
tur, poſſe æquale ei, quod partibus ipſius g k conti- 2. lemm. pappi
netur. ſectio igitur circulus eſt, cuius diameter g k. D

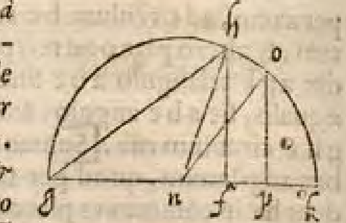


E V T O C I V S.

Quintum theorema caſum non habet. exordiens autem Apollonius expoſitionem. Secetur, A
inquit, conus per axem plano ad baſim recto. *Sed quoniam in cono ſcaleno iuxta unam*
dumtaxat poſitionem triangulum per axem ad baſim rectum eſt: hoc ita faciemus; ſumentes nam-
que baſis centrum: ab eo erigemus lineam ad rectos angulos ipſi plano baſis: perq; eiuſmodi lineam,
& per axem planum ducentes, id, quod propoſitum fuerat, aſſequemur: oſtenſum etenim eſt in
undecimo libro elementorum Euclidis, ſi recta linea plano alicui ad rectos angulos fuerit, & omnia, 18. undecimi
quæ per ipſam ducuntur, plana eidem ad rectos angulos eſſe. conum uero ſcalenum poſuit, quoniam
in æquicruri planum baſi æquidiſtans idem eſt, quod ſub contrarie ductum. præterea ſecetur, in- B
quit, & altero, plano ad rectos angulos ipſi triangulo per axem, quod abſcindat ex
uerticis parte triangulum ſimile ipſi a b c, ſubcontrarie uero poſitum. *illud ita fiet. ſit*
triangulum per axem a b c: ſumaturq; in linea a b quoduis punctum g: & ad a g rectam lineam, 23. primi
& ad punctum in ea g, conſtituatur angulus a g k ipſi a c b æqualis. ergo triangulum a g k,
triangulo a b c ſimile erit, quamquam ſub contrariæ poſitum. itaque ſumatur in linea g k quod
libet punctum f, à quo erigatur f h ad rectos angulos ipſi plano trianguli a b c: & per lineas g k,
h f planum ducatur. erit illud ad triangulum a b c rectum, quòd per lineam f h tranſeat: & faciet 18. undecimi
id, quod faciendum proponebatur. In concluſione dicit, propter ſimilitudinem triangulo- C

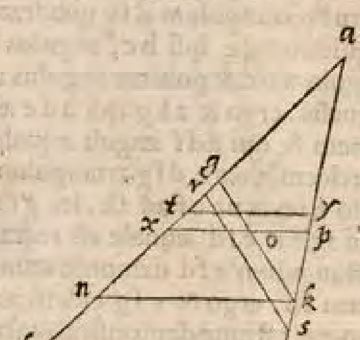
rum d f g, e f k æquale esse rectangulum d f e rectangulo g f k. *quod quidem & absq; triangulorum similitudine demonstrari potest, hoc pacto: quoniam enim uterque angulorum a k g, a d e*
21. tertii *æqualis est angulo, qui ad b, in eadem erunt portione circuli, puncta d g e k comprehendentis. &*
35. tertii. *quoniam in circulo duæ rectæ lineæ d e, g k sese secant in f, rectangulum d f e æquale est rectangulo g f k. Similiter demonstrabuntur & omnes lineæ ab ipsa g h k ductæ perpendiculares ad g k*
D *rectam, posse æquale ei, quod partibus ipsius g k continetur.* circulus igitur sectio est, cuius diameter g k. *possumus autem hoc demonstrare per deductionem ad id, quod fieri non potest. Si enim circulus; qui circa g k describitur, non transit per h punctum; erit rectangulum k f g æquale quadrato lineæ maioris ipsa f h, uel minoris, quod non ponitur. sed & illud idem recta demonstratione ostendemus. sit linea quædam g h k, cui subtendatur recta g k: sumantur autem & in linea duo quæuis puncta h, o, à quibus ad ipsam g k perpendiculares ducantur h f, o p: sitq; quadratum f h æquale rectangulo g f k: & quadratum o p æquale ipsi g p k rectangulo. Dico lineam g h o k circulum esse. secetur enim g k recta bifariam in puncto n: & iungantur g h, h n, n o. Quoniam igitur recta linea g k secatur in partes æquales in n, &*

28.



5. secundi *in partes inæquales in f: rectangulum g f k una cum quadrato n f æquale erit quadrato n k. sed rectangulum g f k positum est*
47. primi. *æquale quadrato h f. quare h f quadratum unà cum ipso n f æquale est quadrato n k. æqualia autem sunt h f, f n quadrata ipsi quadrato n h, cum angulus ad f sit rectus. ergo quadratum n h*
9. tertii *quadrato n k æquale erit. similiter ostendemus quadratum n o æquale esse quadrato n k. linea igitur g h k circulus est, & eius diameter g k. fieri autem potest, ut diametri d e, g k quandoque æquales sint, quandoq; inæquales: nunquam tamen se se bifariam secabunt. ducatur enim per k ipsi b c æquidistans n k. Quoniam igitur maior est b a quam a c, & ipsa n a, quàm a k maior erit. eadem ratione & k a maior est, quàm a g propter subcontrariam sectionem. quare si à linea a n abscissa fuerit æqualis ipsi a k: inter puncta g n cadet, ut a x: & per x ducta æquidistans ipsi b c secabit g k. secet ut x o p. itaque quo-*

29



4. sexti *niam æqualis est x a ipsi a k, & sicut x a ad a p, ita k a ad*
9. quinti *a g ob similitudinem triangulorum g k a, x p a: erit a g ipsi a p æqualis, & reliqua g x ipsi p k. & quoniam anguli ad puncta x, k inter se æquales sunt, uterq; enim ipsorum æqualis est angulo ad b: sunt autem & qui ad o æquales, quod secundum uerticem: erit triangulum x g o simile triangulo p o k. sed æqualis est g x ipsi p k. quare & x o ipsi o k, & g o ipsi o p, & tota g k toti x p est æqualis. ex quibus constat, si inter g x sumatur punctum r, & per r ducatur r s æquidistans g k; ipsam r s maiorem esse, quàm g k, & propterea maiorem, quàm x p. si uero inter puncta r x sumatur aliud punctum, ut t; & per ipsum ducatur t y æquidistans x p: minor erit t y, quàm x p: & ob id minor, quàm g k. præterea cum angulus x p k maior sit angulo a x p:*
19 primi. *æqualis autem o p k ipsi o g x: erit o g x angulus maior angulo g x o. ergo linea x o maior ipsa o g: & idcirco x o maior o p. Quod si quandoque contingat, ut altera ipsarum bifariam secetur, tunc alteram in partes inæquales secari necesse erit.*

FED. COMMANDINVS.

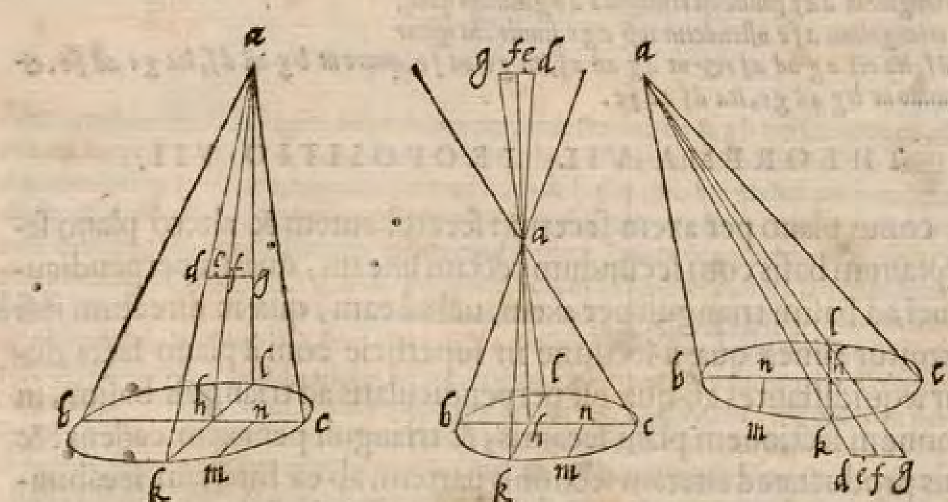
A Et secetur plano per axem ad circulum b c recto.] *Quomodo hoc faciendum sit, demonstrat etiam Serenus in libro de sectione coni, propositione 14.*

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si conus plano per axem secetur: sumatur autem aliquod punctum
A in superficie coni, quod non sit in latere trianguli per axem: & ab ipso ducatur recta linea, æquidistans cuidam rectæ, quæ perpendicularis est à cir-

quæ ducta sit perpendicularis à quouis puncto in plano circuli sumpto ad trianguli basin: quamuis productam, à circumferentia circuli ad trianguli basim: triangulo per axem occurret, & ulterius producta usque ad alteram superficiei partem, bifariam ab ipso triangulo secabitur.

Sit conus, cuius uertex a punctum: basis autem circulus b c: seceturq; conus plano per axem, quod communem sectionem faciat triangulum a b c: & ab aliquo puncto eorum, quæ sunt in b c circumferentia, ut ab m ducatur m n perpendicularis in plano circuli
ad ipsam b c rectam: sumatur quoque in superficie coni punctum d, per quod ipsi m n æquidistans ducatur d e. Dico lineam d e occurrere superficiei trianguli a b c; & ulterius productam in alteram partem coni, quousque ad eius superficiem pertineat, à trianguli a b c plano bifariam secari. iungatur a d, & producatur.* occurret 1.huius
iam circumferentiæ circuli b c. occurrat in k, & à puncto k ad b c rectam perpendicularis ducatur k h l.* æquidistans est igitur k h ipsi m n.* quare & ipsi d e. ducatur ab 28. primi
a puncto ad h linea a h.* itaque quoniam in triangulo a h k, ipsi h k æquidistat d e, B 9. Vndecimi
conueniet d e producta cum linea a h. est autem a h in plano trianguli a b c. ergo d e trianguli a b c plano occurret. occurrat in f: & producatur d e f in rectum, quousque ad superficiem coni pertineat in g. Dico d f ipsi f g æqualem esse. Quoniam enim



30

puncta a g l sunt & in superficie coni, & in plano per a h, a k, d g, k l ducto,* quod quidem triangulum est, cum per uerticem conum secet: erunt a g l in communi sectione superficiei coni, & ipsius trianguli. ergo recta linea est, quæ per a g l puncta transit.* At cum in triangulo a l k, ipsi k h l basi æquidistans ducta sit d g: & à puncto a C 3.huius
ducatur a f h: erit ut k h ad h l, ita d f ad f g. æqualis autem est k h ipsi h l,* quod in 3.tertii
circulo b c perpendicularis ad diametrum ducitur k l. ergo & d f ipsi f g æqualis erit.

EVTOCIVS

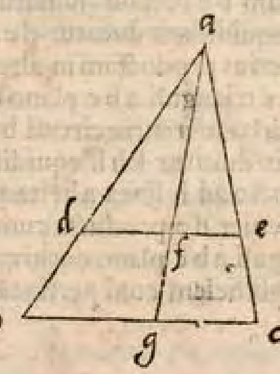
Animadvertendvm est, non frustra apponi in propositione, oportere rectam lineam ductam à puncto superficiei, æquidistantem esse cuidam rectæ, quæ à circuli circumferentia perpendicularis est ad basim trianguli per axem. nisi enim hoc ita sit, fieri non potest, ut recta linea à triangulo bifariam secetur, quod quidem ex descripta figura manifeste apparet. Nam si linea m n, cui æquidistat d f g, ad ipsam b c non sit perpendicularis: neque k l bifariam secabitur. eadem enim ratione colligimus, ut k h ad h l, ita esse d f ad f g. ergo & d g in partes inæquales secabitur ad punctum f. potest autem illud idem, tum infra circulum, tum in superficie, quæ est ad uerticem, similiter demonstrari. A

à puncto in plano circuli sumpto.

FED. COMMANDINVS.

B Itaque quoniam in triangulo a h k, ipſi h k æquidiſtat d e, conueniet d e producta cum linea a h.] *Sequitur hoc ex ſecunda propoſitione perſpectiuæ Vitellionis. ſunt enim d e, h a in eodem plano, nam cum duas æquidiſtantes* k h, *d e coniungat recta linea* k d: *erunt ex ſeptima propoſitione undecimi elementorum tres lineæ h k,* k d, *d e in eodem plano. Sed & in eodem plano ſint* k h, *h a ex ſecunda propoſitione eiuſdem libri. ergo d e, h a in eodem plano ſint neceſſe eſt.*

C At cum in triangulo a l k ipſi k h l baſi æquidiſtans ducta ſit d g, & à puncto a ducatur a f h; erit ut k h ad h l, ita d f ad f g.] *Illud uero hoc lemmate demonſtrabimus.*



Sit triangulum a b c: & ducta d e ipſi b c æquidiſtante, à puncto a ad baſim ducatur a g, quæ lineam d e ſecet in f. Dico d f ad f e ita eſſe, ut b g ad g c.

29 primi — *Quoniam enim b c, d e æquidiſtant inter ſe, erunt anguli a b g, a d f æquales: itemq; æquales inter ſe anguli a g b, a f d. quare triangulum a d f ſimile eſt triangulo a b g. eadem quoq;*
4. ſexti — *ratione triangulum a f e oſtendetur ipſi a g c ſimile. ut igitur*
11. quinti — *b g ad d f, ita eſt a g ad a f: & ut a g ad a f, ita g c ad f e. quare ut b g ad d f, ita g c ad f e. & permutando ut b g ad g c, ita d f ad f e.*

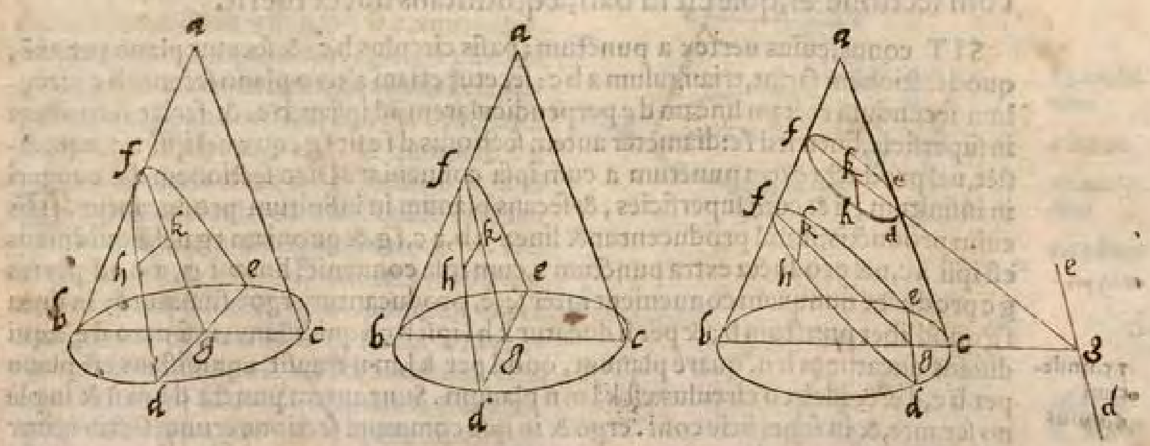
THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Principales ſectionis diametri que ſint quique axes.

SI conus plano per axem ſecetur: ſecetur autem & altero plano ſecante planum baſis coni ſecundum rectam lineam, quæ ſit perpendicularis, uel ad baſim trianguli per axem, uel ad eam, quæ in directum ipſi baſi conſtituitur: lineæ quæ à ſectione in ſuperficie coni à plano facta ducuntur æquidiſtantes ei, quæ eſt perpendicularis ad trianguli baſim, in plano ſecante in communem ſectionem plani ſecantis, & trianguli per axem cadent: & ulterius productæ ad alteram ſectionis partem, ab ea bifariam ſecabuntur. & ſiquidem rectus ſit conus, linea, quæ eſt in baſi, perpendicularis erit ad communem ſectionem plani ſecantis, & trianguli per axem: ſi uero ſcalenus, non ſemper, niſi cum planum, quod per axem ducitur, ad baſim coni rectum fuerit.

Sit conus, cuius uertex punctum a; baſis b c circulus: & ſecetur plano per axem, quod ſectionem faciat triangulum a b c. ſecetur autem, & altero plano ſecante planum, in quo eſt circulus b c ſecundum d e rectam lineam, uel perpendicularem ad b c, uel ad eam, quæ in directum ipſi conſtituitur: & faciat ſectionem in ſuperficie coni, lineam d f e: communis autem ſectio plani ſecantis, & trianguli a b c ſit f g: & ſumatur in ſectione d f e punctum h, à quo linea h k ipſi d e æquidiſtans ducatur. Dico h k lineæ f g occurrere, & ulterius productam ad alteram partem ſectionis d f e, à linea f g bifariam ſecari. quoniã enim conus, cuius uertex a punctum, & baſis circulus b c, plano per axem ſecatur, quod ſectionem facit a b c triangulũ; ſumitur autem in ſuperficie
3. huius — pũctum h, quod non eſt in latere trianguli a b c; eſtq; d g ad b c perpendicularis: ducta
6. huius — per h linea h k, ipſi d g æquidiſtans, triangulo a b c occurret; & ulterius producta ad alteram partem ſuperficiei à triangulo bifariam ſecabitur. & quoniam, quæ per h ducitur æquidiſtans ipſi d e, occurrit triangulo a b c; atque eſt in plano ſectionis d f e: in communem ſectionem plani ſecantis, & trianguli a b c cadet. ſed linea f g eſt communis

nis sectio planorum. ergo per h ducta ipsi d e æquidistans cadit in lineam f g; & ulterius producta ad alteram sectionis partem ab ea bifariam secatur. itaque uel conus est rectus, uel triangulum a b c, quod per axem transit, rectum est ad b c circulum, uel



neutrum horum contingit. sit primum conus rectus: tunc & a b c triangulum ad circulum b c rectum erit. & quoniam planum a b c rectum est ad planum b c: & ad communem ipsorum sectionem, uidelicet ad lineam b c in ipso b c plano perpendicularis ducta est d e: erit d e & ad triangulum a b c perpẽdicularis; & ad omnes rectas lineas, quæ in triangulo a b c existentes ipsam contingunt. quare & ad lineam f g. sed non sit conus rectus. si igitur triangulum per axem rectum est ad circulum b c; similiter ostẽdemus lineam d e ad f g perpendicularem esse. quod si triangulum per axem a b c nõ sit rectum ad circulum b c, non erit ipsa d e ad f g perpendicularis. sit enim, si fieri potest: est autem & perpendicularis ad b c. ergo d e ad utramque lineam b c, f g perpendicularis erit: & idcirco ad planũ, quod per lineas b c, f g ducitur. sed planum per b c, f g, est a b c triangulum. linea igitur d e ad triangulum a b c est perpendicularis: quare & omnia, quæ per ipsam transeunt, plana ad a b c triangulum recta sunt. planum uero, in quo est circulus b c per lineam d e transit. ergo b c circulus rectus est ad triangulum a b c: ac propterea triangulum a b c ad b c circulum rectum erit. quod non ponebatur. non igitur d e ad ipsam f g est perpendicularis.

8. deffin. huius
18. Vndecimi
4. & 3. diff. vndecimi
4. undecimi.
18. undecimi

Coroll: Ex quibus constat lineam f g diametrum esse sectionis d f e, cum lineas omnes, quæ in ipsa ducuntur, uni cuipiam æquidistantes bifariam secet. constat præterea fieri posse; ut lineæ æquidistantes à diametro f g bifariam quidem, non autem ad rectos angulos secentur. 10. diffin. huius

* que in posterum uocabitur diameter ex generatione seu principalis diameter

EVTOCIVS.

SEPTIMVM *theorema quatuor casus habet; uel enim f g non occurrit lineæ a c, uel tribus modis occurrit, aut extra circulum, aut intra, aut in ipso c puncto.*

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

SI conus plano secetur per axem: & secetur altero plano secante basim coni secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis: diameter autem sectionis factæ in superficie, uel æqui distet uni laterum trianguli,uel cum ipso extra coni uerticē conueniat: & producantur in infinitum tum superficies coni, tum planum secans: sectio quoque ipsa in infinitum augebitur: & ex diametro sectionis ad uerticem cuilibet lineæ datæ æqualem abscindet linea, quæ quidem à coni sectione ei,quæ est in basi,æquidistans ducta fuerit.

SIT conus,cuius uertex a punctum; basis circulus b c: & secetur plano per axē, quod sectionem faciat,triangulum a b c: secetur etiam altero plano secante b c circulum secundum rectam lineam d e perpendicularem ad ipsam b c: & faciat sectionem in superficie,lineam d f e: diameter autem sectionis d f e sit f g, quæ uel ipsi a c æquidistet,uel producta extra punctum a cum ipsa conueniat. Dico sectionem d f e augeri in infinitum, si & coni superficies, & secans planum in infinitum producantur. His enim productis,simul producentur & lineæ a b,a c,f g.& quoniam f g uel æquidistans est ipsi a c,uel producta extra punctum a,cum ipsa conuenit; lineæ f g, a c ad partes g c productæ nunquam conuenient inter se se. producantur ergo: sumaturq; in linea f g quodlibet punctum h; & per h ducatur k h l ipsi b c æquidistans: ipsi uero d e æquidistans ducatur m h n. quare planum, quod per k l,m n transit,æquidistans est plano per b c,d e: & idcirco circulus est k l m n planum. Sunt autem puncta d e m n & in plano secante,& in superficie coni. ergo & in ipsa communi sectione erunt: sectio igitur d f e aucta est usque ad puncta m n. ex quibus apparet si tum coni superficies,tum secans planum producantur ad k l m n circulum, & sectionem ipsam d f e usque ad m n puncta augeri. eadem ratione demōstrabitur sectionē m d f e n augeri in infinitum, si & superficies coni, & planum secās in infinitum producantur. perspicuum igitur est cuilibet datæ lineæ æqualem abscindere lineam quandam ex ipsa f h ad partes f. si enim datæ lineæ æqualem ponamus f x; & per x ipsi d e æquidistantem ducamus; conueniet ea cum sectione,quemadmodum & quæ per h demonstrata est cum eadem ad puncta m n conuenire. quare poterit linea quædam duci æquidistans ipsi d e,quæ cum sectione cōueniat,& ex ipsa f g ad partes f lineæ datæ æqualem lineam abscindat.

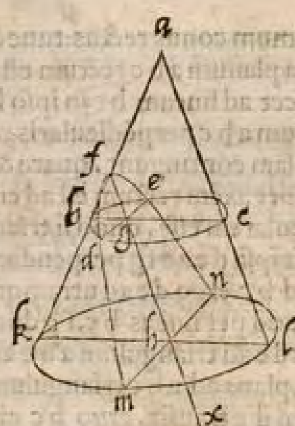
i ch y pot

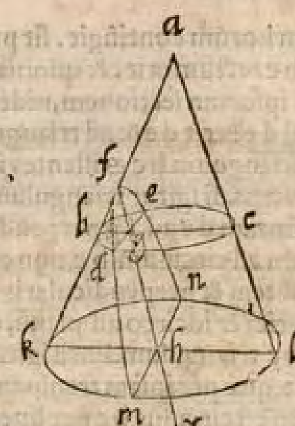
A in plano trianguli per axem

A in plano secante

15.undecimi

4.huius





THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

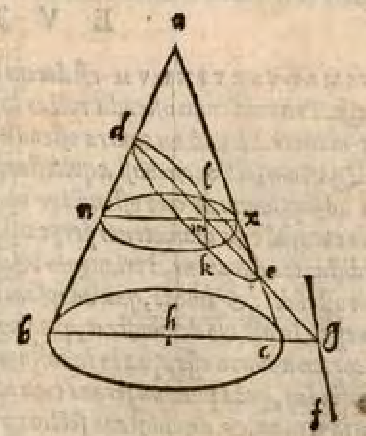
SI conus plano secetur conueniente cum utroque latere trianguli per axem,quod neque basi æquidistet, neque subcontrarie ponatur: sectio circulus non erit.

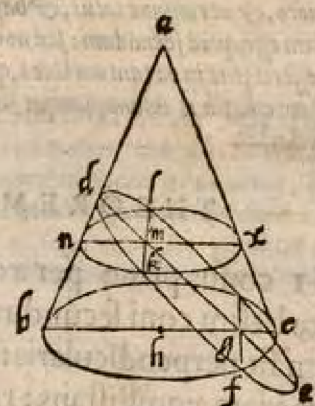
SIT conus,cuius uertex a pūctum,basis circulus b c: & secetur plano aliquo,neque basi æquidistante,neque subcontrarie posito, quod sectionem faciat in superficie lineam d k e. Dico d k e non esse circulum. Sit enim,si fieri potest: occurratq; planum secans ipsi basi; ita ut communis planorum sectio sit recta linea f g: centrum autem circuli b c sit h; & ab h ad f g perpendicularis ducatur h g: deinde per h g,& axem producatur planum,quod in conica superficie sectiones faciat b a,a c rectas lineas. Quoniam

Secantes communem sectionem plani secantis cum conica superficie in punctis d, e niã igitur puncta d e g sunt & in plano, quod per d k e transit, & in eo, quod per a b c, necessario in cõmuni ipsorum sectione erunt.* quare recta linea est d e g. sumatur in linea d k e punctum aliquod k: & per k lineæ f g æquidistans ducatur k m l.* erit k m ipsi m l æqualis. quare d e diameter est circuli d k e l. ducatur deinde per m linea n m x ipsi b c æquidistãs: est autem & k l æquidistans f g.* ergo planum quod per n x, k m ducitur, æquidistãs est plano per b c, f g, hoc est ipsi basi.* proptereaq; sectio n k x l circulus erit. & quoniam f g perpendicularis est ad b c g,* sequitur & k m ad n x perpendicularem esse.* quare rectangulum n m x æquale est quadrato k m. sed & rectangulum d m e æquale est k m quadrato, cum linea d k e l circulus ponatur, cuius diameter d e. rectangulum igitur n m x æquale est rectangulo d m e.* & idcirco ut n m ad m d, ita e m ad m x.* quare d m n triangulũ simile est triangulo x m e: & angulus d n m æqualis m e x angulo.* Sed d n m angulus angulo a b c est æqualis; æquidistat enim n x ipsi b c. ergo & angulus a b c æqualis erit angulo m e x. Subcontraria igitur sectio est; quod non ponebatur. ex quibus manifeste constat lineam d k e circulum non esse.

posita

3. undecimi
6. huius
15. undecimi
4. huius
10. undecimi
17. sexti
16. sexti
6 sexti
29. primi





THEOREMA X. PROPOSITIO X.

SI in coni sectione duo puncta sumantur, recta linea, quæ eiusmodi puncta coniungit, intra sectionem cadet; & quæ in directum ipsi constituitur, cadet extra.

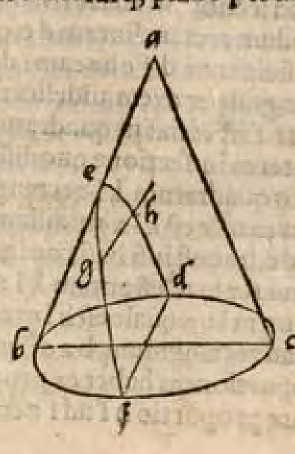
quæ per verticem coni non transeat.

SIT conus, cuius uertex punctum a; basis b c circulus: seceturq; plano per axem & faciat sectionem triangulum a b c: secetur autem & altero plano, quod in superficie coni sectionem faciat d e f lineam: & in ipsa d e f duo puncta sumantur, quæ sint g h. Dico rectam lineam, quæ g h puncta coniungit, intra sectionem d e f cadere: & quæ in directum ipsi constituitur, extra. Quoniam enim conus, cuius uertex a punctum, & basis circulus b c, plano secatur per axem, & in superficie ipsius puncta quæpiam sumuntur g h, quæ non sunt in latere trianguli per axẽ; linea, quæ à puncto g, ad h ducitur, non pertinebit ad a.* ergo recta linea coniungens puncta g h intra conum, hoc est intra coni sectionem d e f cadet: & quæ in directum ipsi constituitur, cadet extra.

per verticem non transeat et

cum sint in sectione non per verticem ducta

2. huius



EVTOCIVS

Animadvertendum est decem hæc theoremata aptissime cohærentia inter se se, & continuata esse. Primum enim ostendit rectas lineas, quæ in superficie coni ad uerticem pertinent, in eadem permanere. Secundum contra ostendit. Tertium explicat coni sectionem, quæ per uerticem efficitur. Quartum sectionem basi æquidistantem. Quintum uero subcontrarium. Sextum est tanquam lemma ad septimum, in quo ostenditur oportere communem sectionem plani secantis, & circuli, qui est basis coni, ad eius diametrum perpendicularem esse: atque hoc ita habente, lineas omnes, quæ ipsi æquidistantes ducuntur, à triangulo bifariam secari. Septimum tres alias sectiones, earumq; diametrum ostendit: & lineas, quæ ad ipsam diametrum ordinatim applicantur ei, quæ in basi æquidistantes esse. In octauo demonstrat, quod nos in principio diximus, uidelicet parabolen, & hyperbolen ex eorum numero esse, quæ in infinitum augentur. In nono ellipsim, quæ in se ipsam uergit tanquam circulus, quod planum secans cum utroque latere trianguli conueniat, circulum non esse: subcontraria etenim, & æquidistans sectio circulum facit. Sed & illud scire oportet, diametrum sectionis in parabola quidem unum duntaxat trianguli latus secare, & ipsam basim: in hyperbola secare, & latus, & lineam, quæ reliquo lateri ad partes uerticis producto in rectum constituitur: in ellipsi uero, & utrumque latus, & basim secare. Posset fortasse quispiam arbitrari decimum theorema idem esse, quod secundum: sed non ita res habet. Illic enim in omni superficie duo quæuis puncta sumi asserit; hic in ea tantum linea, quæ à secante plano efficitur. At in tribus, quæ deinceps sequuntur, theorematibus unamquanque sectionem diligentius expendit: & principes earum proprietates declarat.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

SI conus plano per axem secetur: secetur autem & altero plano secante basim coni secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis: & sit diameter sectionis uni laterum trianguli per axem æquidistans: recta linea, quæ à sectione coni ducitur æquidistans communi sectioni plani secantis, & basis coni, usque ad sectionis diametrum; poterit spatium æquale contento linea, quæ ex diametro abscissa inter ipsam & uerticẽ sectionis interiicitur, & alia quadam, quæ ad lineam inter conangulum, & uerticem sectionis interiectam, eam proportionem habeat, quàm quadratum basis trianguli per axem, ad id quod reliquis duobus trianguli lateribus continetur. dicatur autem huiusmodi sectio parabole.

Generatio Parabolę et Inuentio lineę iuxta quam possunt quę ab Apoll. Recta etiam u catur, à Neotericis uero Latus rectum et Parameter.

SIT conus, cuius uertex punctum a; basis b c circulus: seceturq; plano per axem, quod sectionem faciat triangulum a b c: & secetur altero plano secante basim coni secundum rectam lineam d e, quæ ad b c sit perpendicularis; & faciat sectionem in superficie coni d f e lineam: diameter autem sectionis f g æquidistans sit uni laterum trianguli per axem, uidelicet ipsi a c; atque à puncto f lineæ f g ad rectos angulos ducatur f h: & fiat ut quadratum b c ad rectangulum b a c, ita linea h f ad f a. sumatur præterea in sectione quodlibet punctum k: & per k ducatur k l ipsi d e æquidistans. Dico quadratum k l rectangulo h f l æquale esse. Ducatur enim per l ipsi b c æquidistans m n: & est k l æquidistans ipsi d e: ergo planum, quod transit per k l m n plano per b c d e, hoc est ipsi basi coni æquidistat: ideoq; planum per k l m n circulus est, cuius diameter m n: est autem k l ad m n perpendicularis, quòd & d e ad b c. rectangulum igitur m l n æquale est k l quadrato: itaque quoniam linea h f ad f a est ut quadratum b c ad rectangulum b a c: quadratum autem b c ad b a c rectangulum compositam proportionem habet ex proportione, quàm b c ad c a, & ex c a, quàm c b habet ad b a. quare proportio h f ad f a componitur ex proportione b c ad c a, & c b ad b a. Vt autem

hypot. 15. undecimi

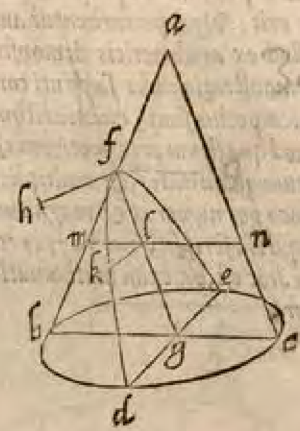
4. huius

10. unde.

hypot.

23. sexti

tem b c ad c a, ita m n ad n a, hoc est m l ad l f: & ut c b ad b a, ita n m ad m a, hoc est l m ad m f, & reliqua n l ad f a: proportio igitur h f ad f a componitur ex proportione m l ad l f, & n l ad f a. sed proportio composita ex proportione m l ad l f, & n l ad f a est ea, quam habet m l n rectangulum ad rectangulum l f a. ergo ut h f ad f a, ita rectangulum m l n ad l f a rectangulum. ut autem h f ad f a, sumpta f l communi altitudine, ita h f l rectangulum ad rectangulum l f a. Vt igitur rectangulum m l n ad ipsum l f a, ita rectangulum h f l ad l f a: & idcirco æquale est rectangulum m l n rectangulo h f l. sed rectangulum m l n æquale est quadrato k l. ergo quadratum k l rectangulo h f l æquale erit. Vocetur autem huiusmodi sectio parabole; & linea h f, iuxta quam possunt, quæ ad f g diametrum ordinatim applicantur: quæ quidem etiam recta appellabitur. et latus rectum.

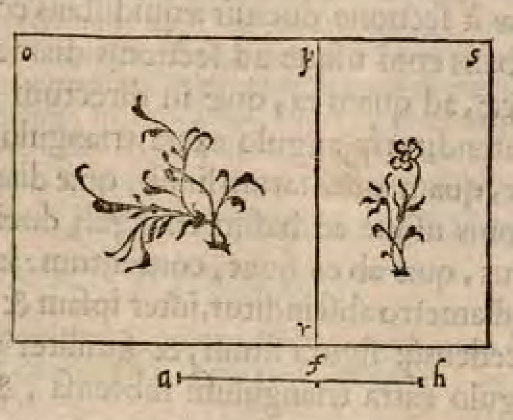


9. quinti
13. sexti.
1. sexti
9. quinti
per ea quę supius sunt demonstrata

EVTOCIVS.

ET fiat ut quadratum b c ad rectangulum b a c, ita linea h f ad lineam f a.] *Manifestum est, quod dicitur, præterquam quòd aliqua adhuc declaratione indiget. Sit rectangulo b a c æquale rectangulum o p r: quadrato autem b c æquale id, quod ad lineam p r adiacens, latitudinem habet p s: & fiat ut o p ad p s, ita a f ad f h. ergo factum iam erit, quod quærebamus. Quoniam enim ut o p ad p s, ita a f ad f h; erit & conuertendo h f ad f a, ut s p ad p o: ut autem s p ad p o, ita rectangulum s r ad ipsum r o, hoc est b c quadratum ad rectangulum b a c. Hoc autem & ad duo quæ sequuntur theoremata utile erit.* A 1. sexti.

Quadratum autem b c ad b a c rectangulum compositam proportionem habet &c.] *Ostensum enim est in sexto libro elementorum Euclidis, theoremate uigesimotertio, æquiangula parallelogramma inter se proportionem habere ex lateribus compositam. Sed quoniam interpretes inductione magis, quam necessaria argumentatione utuntur; uisum est nobis illud ipsum inuestigare: quod tametsi scripsimus in commentarijs, in quartum theorema secundi libri Archimedis de sphæra & cylindro, & in primum magnæ constructionis Ptolemæi, nihilominus tamen & hoc loco non inepte repetetur; propterea quòd fortasse non omnes, qui hæc legent, in illos libros inciderunt: tum etiam, quòd uniuersa ferè conicorum tractatio eum argumentandi modum usurpat.* B



Proportio ex proportionibus componi dicitur, quando proportionum quantitates inter se multiplicatæ aliquam producunt. *Per quantitatem intelligendo numerum, à quo proportio ipsa denominatur. in multiplicibus quidem quantitas erit numerus integer; in reliquis uero habitudinibus necesse est quantitatem numerum esse, & partem, seu partes, nisi forte quispiam uelit etiam ἀῤῥήτους, uidelicet quæ exprimi non possunt, habitudines esse, quales sunt magnitudinum irrationalium. Itaque in omnibus habitudinibus ipsa quantitas multiplicata in consequentem terminum producit antecedentem. Sit igitur proportio a ad b: & sumpto termino quolibet intermedio c, sit proportionis a c quantitas d: proportionis autem c b quantitas sit e: & d multiplicans e producat f. Dico f proportionis a b quantitatem esse: hoc est si f multiplicet b produci ipsum a. itaque multiplicet f ipsum b, & producat g. Quoniam igitur d ipsum quidem e multiplicans producit f; multiplicans autem c ipsum a producit: erit f ad a, ut e ad c. Rursus cum b multiplicans e faciat* 17. septimi.

Aliter [illegible]
* et fiat ut diameter f g ad semiapplicatam g d, ita g d ad aliam f h, sumatur præterea & ut ibi usque ad hoc * postea uero sequatur hic Itaque, quoniam f g ad g d est ut g d ad f h erit rectangulum g f h æquale [quadrato] g d. Præterea quia f g æquidistet ipsi a c et m l n ipsi b g c lineæ l n, g c æquales erunt. Quum enim quadratum d g ad quadr. k l, sit ob æqualitatem ut rectangulum b g c ad rectangulum m l n, uel ut recta b g ad rectam m l (ob æquales altitudines g c, l n) uel ut g f ad f l (ob triangulorum similitudinem) uel ut rectangulum sub g f in f h ad rectangulum sub l f in f h, (ob communem altitudinem f h) erit permutando quadratum g d ad rectangulum g f h, ut quadratum k l ad rectangulum l f h, sed antecedentia sunt æqualia (ut id quod supra ostendimus) ergo et consequentia, nempe quadratum k l æquale est rectangulo l f h. Vocetur autem & c atque

e, & multiplicans f faciat g; erit ut e ad f, ita c ad g: & permutando ut e ad c, ita f ad g. sed ut e ad 9. quinti. *c, ita erat f ad a. ergo g ipsi a est æqualis: & idcirco f multiplicans b producit a. proportionis igitur a b, f quantitas necessario erit: Non perturbentur autem qui in hæc inciderint, quòd illud ex arithmeticis demonstretur: antiqui enim huiusmodi demonstrationibus sæpe uti consueuerunt; quæ tamen mathematicæ potius sunt, quàm arithmeticæ propter analogias. adde quod quæsitum arithmeticum est; nam proportiones, proportionum quantitates, & multiplicationes primo numeris, secundo loco per numeros & magnitudinibus insunt, ex illius sententia, qui ita scripsit, ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι ἦμεν ἀδελφά. hoc est, hæc enim mathematicæ disciplinæ germanæ esse uidentur.*

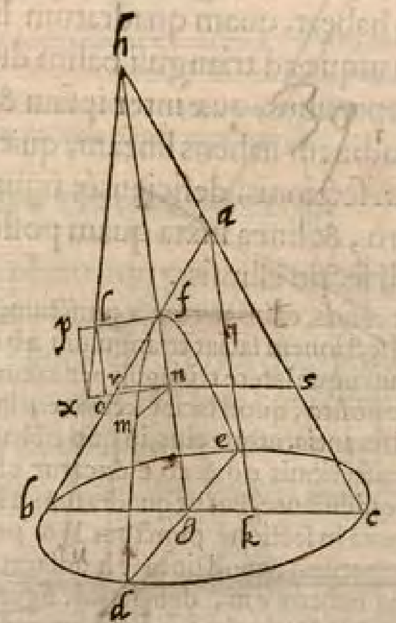
THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

Si conus plano per axem secetur; secetur autem & altero plano secante basim coni secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis: & sectionis diameter producta cum uno latere trianguli per axem, extra uerticem coni conueniat: recta linea, quæ à sectione ducitur æquidistans communi sectioni plani secantis, & basis coni usque ad sectionis diametrum, poterit spatium adiacens lineæ, ad quam ea, quæ in directum constituitur diametro sectionis, subtenditurq; angulo extra triangulum, eandem proportionem habet, quam quadratum lineæ, quæ diametro æquidistans à uertice sectionis usque ad basim trianguli ducitur, ad rectangulum basis partibus, quæ ab ea fiunt, contentum: latitudinem habens lineam, quæ ex diametro abscinditur, inter ipsam & uerticem sectionis interiectam; excedensq; figura simili, & similiter posita ei, quæ continetur linea angulo extra triangulum subtensa, & ea, iuxta quam possunt quæ ad diametrum applicantur. uocetur autem huiusmodi sectio hyperbole.

Ortus Hyperbolę et inuentio laterum Recti, et Transuersi quę in posterum figurę latera appellantur

Sit conus, cuius uertex a punctum, basis circulus b c: & secetur plano per axem, quod sectionem faciat triangulum a b c: secetur autem & altero plano secante basim coni, secundum rectam lineam d e ad b c basim trianguli a b c perpendicularem: faciatq; sectionem in superficie coni lineam d f e: & sectionis diameter f g producta cum ipso a c latere trianguli a b c extra coni uerticem conueniat in puncto h: deinde per a ducatur linea a k diametro æquidistans, quæ secet b c: & ab f ducatur f l ad rectos angulos ipsi f g: fiatq; ut quadratum k a ad rectangulum b k c, ita h f linea ad lineam f l. Sumatur autem in sectione quodlibet punctum m, & per m ducatur m n æquidistans d e; & per n ipsi f l æquidistans ducatur n o x. postremo iuncta h l, & ad x producta, per l x ipsi f n æquidistantes ducantur l o, x p. Dico lineam m n posse spatium

ſpatium f x, quod quidem adiacet lineæ f l, latitudinem habens f n, exceditq; figura l x ſimili ei, quæ h f l continetur. Ducatur enim per n linea r n ſ æquidiſtans b c: eſt autem & m n ipſi d e æquidiſtans. ergo planum, quod tranſit per m n r ſ æquidiſtat plano per b c d e, hoc eſt baſi coni. 15. undecimi Si igitur planum per m n r ſ producatur, ſectio circulus erit, cuius diameter r n ſ: atque eſt ad ipſam perpendicularis m n. 4. huius ergo rectangulum r n ſ æquale eſt m n quadrato. Coroll. 8 sexti itaque quoniam ut a k quadratum ad rectangulum b k c, ita eſt h f ad f l. 23 · sexti proportio autem quadrati a k ad rectangulum b k c componitur ex proportione, quam habet a k ad k c, & ex ea, quam a k habet ad k b: & proportio h f ad f l compoſita erit ex proportione, a k ad k c, & proportione a k ad k b. ſed ut a k ad k c, ita h g ad g c, hoc eſt h n ad n ſ: & ut a k ad k b, ita f g ad g b, hoc eſt f n ad n r. proportio igitur h f ad f l componitur ex proportione h n ad n ſ, & f n, ad n r. at proportio compoſita ex proportione h n ad n ſ, & f n ad n r; eſt ea, quam h n ſ rectangulum habet ad rectangulum f n r. 23. ſexti ergo ut rectangulum h n ſ ad f n r, ita h f ad f l, hoc eſt h n ad n x. ut autem h n ad n x, ſumpta f n communi altitudine, ita h n f rectangulum ad rectangulum f n x. 1. ſexti quare ut rectangulum h n ſ ad rectangulum f n r, ita rectangulum h n f ad ipſum f n x. rectangulum igitur f n r æquale eſt rectangulo x n f. 9. quinti Sed quadratum m n oſtenſum eſt æquale rectangulo f n r. ergo quadratum m n rectangulo x n f æquale erit. rectangulum autem x n f eſt parallelogrammum x f. linea igitur m n poteſt ſpatium x f, quod lineæ f l adiacet; latitudinem habens f n, excedensq; figura l x ſimili ei, quæ h f l continetur. dicatur autem huiuſmodi ſectio hyperbole: & linea l f, iuxta quam poſſunt, quæ ad f g ordinatim applicantur. quæ quidem etiam recta appellabitur, uel latus rectum. uel latus tranſuerſa uero h f. et hl regolatrix · uel figuram determinans, et hf fl simul latera figuræ transuersum



FED. COMMANDINVS.

Linea igitur m n poteſt ſpacium x f, quod lineæ f l adiacet, latitudinem habens f n, excedensq; figura l x ſimili ei, quæ h f l continetur] *Græca uerba ſic habent*, ἡ ἄρα μν δύναται τὸ ξζ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ζλ, πλάτος ἔχον τὴν ζν, ὑπερβάλλον τῷ λξ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ τῶν θζλ. *ex quibus ſatis perſpicue apparere poteſt, unde dicta ſit ſectio hyperbole.*

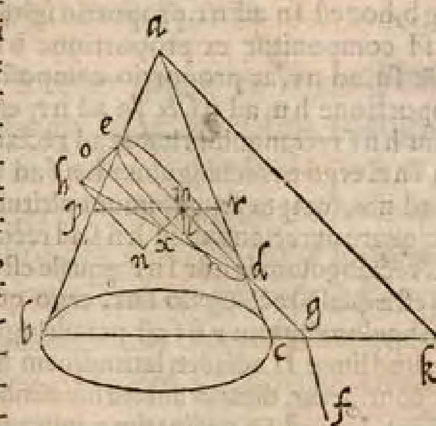
THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

SI conus plano per axem ſecetur, & ſecetur altero plano conueniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque baſi coni æquidiſtet, neque ſubcontrarie ponatur: planum autem, in quo eſt baſis coni, & ſecans planum conueniant ſecundum rectam lineam, quæ ſit perpendicularis uel ad baſim trianguli per axem, uel ad eam, quæ in directum ipſi conſtituitur: recta linea, quæ à ſectione coni ducitur æquidiſtans communi ſectioni planorum uſque ad diametrum ſectionis poterit ſpatium adiacens lineæ, ad quam ſectionis diameter eam proportionem habeat, quam quadratum lineæ diametro æquidiſtantis à uertice coni uſque ad trianguli baſim ductæ, habet ad rectangulum contentum baſis partibus, quæ inter ipſam & rectas trianguli lineas interiiciuntur; latitudinem habens lineam, quæ ex diametro ab ipſa abſcinditur ad uerticem ſectionis, deficiensq; figura ſimili, & ſimiliter poſita ei, quæ diametro, & linea iuxta quam poſſunt, continetur. dicatur autem huiuſmodi ſectio ellipſis.

Ortus Ellipsis eiusq: Latus rectum et Latus transuersum quod etiam diameter appellatur.

Que latera simul, rectum. s. et transuersum, figure latera in posterum dicuntur.

Sit conus, cuius uertex a punctum; baſis circulus b c: & ſecetur plano per axem, quod ſectionem faciat triangulum a b c: ſecetur autem & altero plano, conueniente cum utroque latere trianguli per axem, neque baſi coni æquidiſtante, neque ſubcontrarie poſito, quod faciat ſectionem in ſuperficie coni lineam d e: & communis ſectio plani ſecantis, atque eius, in quo eſt baſis coni, ſit f g perpendicularis ad b c: diameter autem ſectionis e d: & ab e ducatur e h ad e d perpendicularis: perq; a ducta a k ipſi e d æquidiſtante, fiat ut quadratum a k ad rectangulum b k c, ita d e ad e h: ſumatur præterea in ſectione punctum l: & per l ipſi f g æquidiſtans ducatur l m. Dico l m poſſe ſpatium, quod lineæ e h adiacet, latitudinem habens e m, deficiensq; figura ſimili ei, quæ d e h continetur. iungatur enim d h: perq; m ducatur m x n æquidiſtans e h: & per h x puncta ipſi e m æquidiſtantes ducantur h n, x o: poſtremo per m ducatur p m r æquidiſtans b c. itaque quoniam p r æquidiſtat b c; & l m ipſi f g; erit planum ductum per l m p r æquidiſtans plano per f g b c ducto, hoc eſt baſi coni. ſi igitur planum per l m p r producatur, fiet ſectio circulus, cuius diameter p r. & eſt l m ad ipſam perpendicularis. ergo rectangulum p m r æquale eſt l m quadrato. Quod cum ſit, ut quadratum a k ad rectangulum b k c, ita d e ad e h; & proportio quadrati a k ad rectangulum b k c componatur ex proportione, quam habet a k ad k b, & ex ea, quam a k habet ad k c: ut autem a k ad k b, ita e g ad g b, hoc eſt e m ad m p: & ut a k ad k c, ita d g ad g c, hoc eſt d m ad m r: erit proportio d e ad e h compoſita ex proportione e m ad m p, & ex proportione d m ad m r. ſed proportio compoſita ex proportione e m ad m p, & d m ad m r eſt ea, quam e m d rectangulum habet ad rectangulum p m r. Quare ut rectangulum e m d ad ipſum p m r, ita d e ad e h; uidelicet d m ad m x. ut autem d m ad m x, ſumpta m e communi altitudine, ita rectangulum d m e ad rectangulum x m e. ergo ut d m e rectangulum ad rectangulum p m r, ita erit d m e rectangulum ad ipſum x m e. æquale igitur eſt rectangulum p m r rectangulo x m e. ſed rectangulum p m r demonſtratum eſt æquale quadrato l m. quare & ipſum x m e quadrato l m æquale erit. linea igitur l m poteſt ſpatium m o, quod quidem lineæ e h adiacet, latitudinem habens e m, deficiensq; figura o n, ſimili ei, quæ d e h continetur. Vocetur autem huiuſmodi ſectio, ellipſis: & linea e h, iuxta quam poſſunt, quæ ad diametrum d e ordinatim applicantur; quæ quidem & latus r. &c. recta uocabitur; e d uero tranſuerſa. et d h regulatrix. uel figuram determinans et d e e h, latera figuræ.



15. undecimi

4. huius

23. ſexti

23. ſexti

uel latus transuersum, et diameter ellipsis.

EVTOCIVS.

SCIRE oportet hoc theorema tres habere deſcriptiones, ut ſæpius dictum eſt in ellipſi: uel enim d e conuenit cum latere a c ſupra c punctum, uel in ipſo c, uel infra cum eo producto conuenit.

FED.

FED. COMMANDINVS.

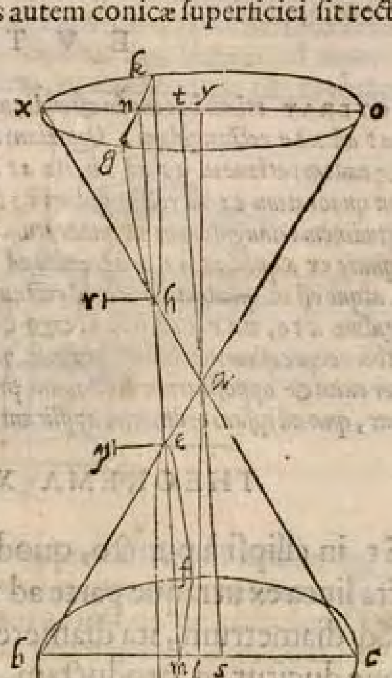
Linea igitur l m potest spacium m o, quod quidem lineæ c h adiacet, latitudinem habens e m, deficiensq; figura o n, simili ei, quæ d e h continetur] *Græca uerba sunt hæc.* ἡ λμ ἄρα δύναται τὸ μο, ὃ παράκειται παρὰ τὴν θε πλάτος ἔχον τὴν εμ, ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ον ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ δεθ. *ex quibus manifeste constat, cur ea sectio ellipsis appellata sit.*

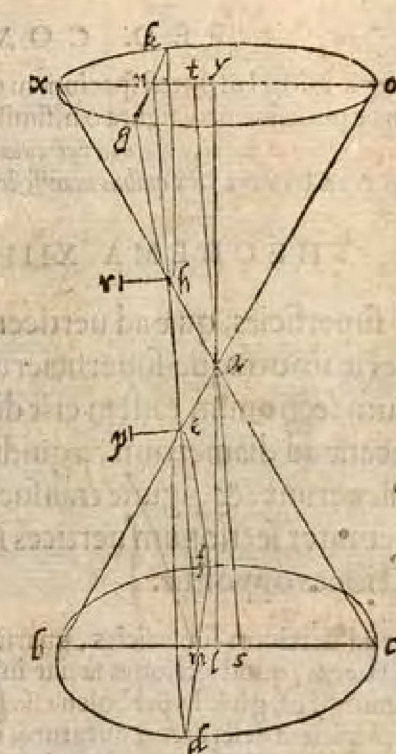
THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XIIII.

Si superficies, quæ ad uerticem sunt, plano non per uerticem secentur; erit in utraque superficierum sectio, quæ uocatur hyperbole: & duarum sectionum eadem erit diameter: lineæ uero, iuxta quas possunt applicatæ ad diametrum, æquidistantes ei, quæ est in basi coni, inter se æquales erunt: & figuræ transuersum latus utrisque commune; quod scilicet inter sectionum uertices interiicitur. uocentur autem huiusmodi sectiones oppositæ.

Sectiones Oppositæ quæ sint. hæ quidem sectiones habent communem diametrum, rectaque latera equalia, idemque latus transuersum.

Sint ad uerticem superficies, quarum uertex a punctum: & secentur plano non per uerticem, quod sectiones faciat in superficie lineas d e f, g h k. Dico utramque sectionum d e f, g h k hyperbolen esse. sit enim circulus b d e f, in quo fertur recta linea superficiem describens; ducaturq; in superficie, quæ est ad uerticem, planum ipsi æquidistans x g o k: & communes sectiones ipsarum sectionum d e f, g h k, & circulorum sint f d, g k, quæ & æquidistantes erunt: axis autem conicæ superficiei sit recta linea l a y: circulorum centra l y: & ab l ad lineam f d perpendicularis ducta producatur ad b c puncta: perq; b c, & axem planum ducatur, quod sectiones faciat in circulis quidem rectas lineas x o, b c æquidistantes; in superficie uero ipsas b a o, c a x: erit x o ad g k perpendicularis: quoniam & b c perpendicularis est ad f d; & utraque est æquidistans. Quòd cum planum per axem ductum sectionibus occurrat ad puncta m n, quæ sunt intra lineas, planè constat ipsum etiã lineas secare in h e. ergo puncta m e h n erunt & in plano per axem, & in eo, in quo sunt lineæ ipsæ; & propterea m e h n recta linea erit. constat etiam puncta x h a c in eadem recta esse, itemq; b e a o; quòd sint in superficie conica, & in plano per axem. Ducantur ergo a punctis h e ipsi h e ad rectos angulos lineæ h r, e p: perq; a lineæ m e h n æquidistans ducatur s a t; & fiat ut quadratum a s ad rectangulum b s c, sic h e ad e p: & ut quadratum a t ad rectangulum o t x, sic e h ad h r. itaq; quoniam conus, cuius uertex a, basis b c circulus, secatur plano per axem, quod sectionem facit triangulum a b c: secatur autem & altero plano, secante basim coni secundum rectam lineam d m f, ad b c perpendicularem, quod sectionem facit in superficie d e f lineam: diameterq; m e producta cum uno latere trianguli per axem extra coni uerticem conuenit: & per punctum a diametro sectionis e m æquidistans ducitur a s: ab e uero ducitur e p, ad rectos angulos ipsi e m: atque est ut quadratum a s ad 16. unde. 10. unde 5. undecimi.





rectangulum b s c, ita h e ad e p: erit ipsa d e f sectio hyperbole: & e p recta linea, iuxta quam possunt, quæ ad e m ordinatim applicantur: transuersum uero figuræ latus h e. Eadem ratione & g h k hyperbole erit, cuius diameter h n: recta linea h r, iuxta quam possunt ordinatim ad h n applicatæ: & h e transuersum figuræ latus. Dico præterea h r ipsi e p æqualem esse. Quoniam enim æquidistantes sunt b c, x o, ut a s ad s c, ita erit a t ad t x: & ut a s ad s b, ita a t ad t o: sed proportio a s ad s c unà cum proportione a s ad s b, est ea quam habet a s quadratum ad rectangulum b s c: & proportio a t ad t x unà cum proportione a t ad t o, est quam habet quadratum a t ad rectangulum x t o. ergo ut quadratum a s ad rectangulum b s c, ita quadratum a t ad rectangulum x t o. ut autem quadratum a s ad b s c rectangulum, ita h e ad e p: & ut quadratum a t ad rectangulum x t o, ita h e ad h r: ergo ut h e ad e p, ita e h ad h r. æqualis igitur est e p ipsi h r. Vocentur autem huiusmodi Sectiones oppositæ.

11. huius — 4. sexti. 23. — 11. quinti. 9.

41 44

EVTOCIVS.

Poterat etiam hoc modo ostendi; ut quadratum a s ad rectangulum b s c, ita esse quadratum a t ad x t o rectangulum. Quoniam enim æquidistant b c, x o; erit ut c s ad s a, ita x t ad t a. & eadem ratione ut a s ad s b, ita a t ad t o. ergo ex æquali, ut c s ad s b, ita x t ad t o. & ideo ut quadratum c s ad rectangulum c s b, ita quadratum x t ad rectangulum x t o. sed propter similitudinem triangulorum ut quadratum a s ad quadratum s c, ita quadratum a t ad quadratum t x. quare ex æquali ut a s quadratum ad rectangulum b s c, ita quadratum a t ad rectangulum x t o. atque est ut quadratum a s ad rectangulum b s c, ita h e ad e p: & ut quadratum a t ad rectangulum x t o, ita e h ad h r. ut ergo h e ad e p, ita e h ad h r. æqualis igitur est e p ipsi h r. Hoc theorema casum non habet. propositum autem idem est, quod etiam in tribus superioribus; similiter enim & oppositarum sectionum principalem diametrum inquirit; & lineas, iuxta quas possunt, quæ ad ipsam ordinatim applicantur.

4. sexti — lem. in 22 decimi

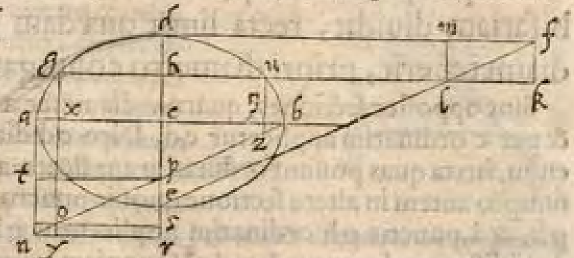
THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Quæ sit in ellipsi, secunda et coniugata diameter.

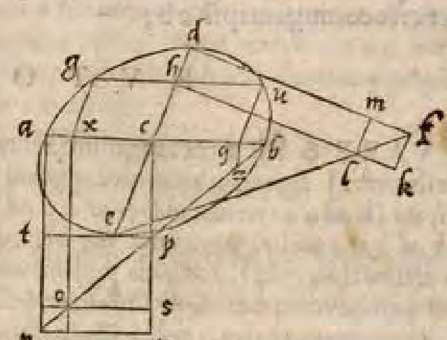
Si in ellipsi à puncto, quod diametrum bifariam diuidit ordinatim ducta linea ex utraque parte ad sectionem producatur; & fiat ut producta ad diametrum, ita diameter ad aliam lineam: recta linea, quæ à sectione ducitur ad productam, diametro æquidistans, poterit spatium adiacens tertiæ proportionali, latitudinem habens lineam, quæ inter ipsam, & sectionem interiicitur, deficiensq; figura simili ei, quæ continetur linea, ad quam ducuntur; & ea iuxta quam possunt. Quòd si ulterius producatur ad alteram partem sectionis, bifariam secabitur ab ea, ad quam applicata fuerit.

Sit ellipsis, cuius diameter a b, seceturq; a b bifariam in c puncto; & per c ordinatim

natim applicata ex utraque parte ad sectionem producatur, quæ sit d c e: à puncto autem d ipsi d e ad rectos angulos ducatur d f: fiatq; ut d e ad a b, ita a b ad d f. & sumpto quolibet puncto g in sectione, per g ducatur g h ipsi a b æquidistans: & iungatur e f. deinde per h ipsi d f æquidistans ducatur h l: & per f l ducantur ipsi h d æquidistantes f k, l m. Dico lineam g h posse spatiũ d l, quod quidem adiacet lineæ d f, latitudinem habens d h; deficiensq; figura l f simili ei, quæ e d f continetur. sit enim linea a n, iuxta quam possunt ordinatim applicatæ ad a b: iungaturq; b n; & per g quidem ipsi d e æquidistans ducatur g x: per x c ipsi a n æquidi-



stantes x o, c p: per n o p uerò ducantur n y r, o s, t p, æquidistantes ipsi a b. æquale 13. huius
igitur est d c quadratum rectangulo a p: & quadratum g x rectangulo a o. itaque quoniam ut b a ad a n, ita est b c ad c p; & p t ad t n: æqualis autem b c ipsi c a, hoc est ipsi p t: & c p ipsi t n, & b p ipsi p n æqualis erit. ergo a p rectangulum æquale re- 14. quinti
ctangulo t r: & rectangulum x t ipsi t y. quòd cum rectangulum o t rectangulo o r 43. primi
æquale sit, commune autem n o. erit rectangulum t y ipsi n s æquale; sed t y est æquale t x, & commune t s. totum igitur rectangulum n p; hoc est p a æquale erit rectangulo a o unà cum p o rectangulo. quare p a rectangulum superat rectangulum a o ipso o p. est autem p a rectangulum æquale c d quadrato: rectangulumq; a o æquale quadrato x g: & o p ei, quod lineis o s p continetur. ergo c d quadratum superat quadratum x g ipso o s p rectangulo. & quoniam linea d e secatur in partes æquales in c puncto, & in partes inæquales in h, rectangulum e h d unà cum quadrato c h, 5 secundi
hoc est x g æquale erit c d quadrato. ex quo sequitur quadratum c d superare x g quadratum, rectangulo e h d. Superabat autem, ut monstratum est, & rectangulo o s p. rectangulum igitur e h d rectangulo o s p est æquale. Præterea cum sit ut d e ad a b, ita a b ad d f: erit ut cor. 20. sexti
d e ad d f, ita d e quadratum ad quadratum a b: hoc est quadratum c d ad quadratũ c b: atque est quadrato c d æquale p c a rectangulum, hoc est p c b. Vt 15. quĩti. 13. huius
ergo e d ad d f, hoc est ut e h ad h l, hoc est ut e h d rectangulum ad rectangulum d h l, ita rectangulum p c b ad c b 4. & 1. sexti.
quadratum: hoc est rectangulum p s o ad quadratum o s. sed rectangulum 4. sexti
e h d æquale est ipsi p s o. rectangulum 9. quinti.
igitur d h l quadrato o s, hoc est quadrato g h est æquale: & idcirco linea g h potest spatium d l, quod adiacet lineæ d f, latitudinem habens d h, deficiensq; figura f l simili ei, quæ e d f continetur. Dico in super g h productam ad alteram partem sectionis ab ipsa d e bifariam secari. producatur enim, occurratq; sectioni in puncto u: & per u ipsi g x æquidistans ducatur



u q: & per q ducatur q z æquidistans a n. Quoniam igitur g x ipsi u q est æqualis, erit g x quadratum æquale quadrato u q. quadratum autem g x æquale est a x o re- 13. huius
ctangulo: & quadratum u q æquale rectangulo a q z. ergo ut o x ad z q, ita q a ad a x. 14. sexti.
& est ut o x ad z q, ita x b ad b q. ut ergo q a ad a x, ita x b ad b q. & diuidendo ut 4
q x ad x a, ita x q ad q b. æqualis igitur est a x ipsi q b. est autem a c æqualis c b. qua 9. quinti.
re & reliqua x c reliquæ c q: & idcirco g h ipsi h u est æqualis. linea igitur g h producta ad alteram sectionis partem ab ipsa d h bifariam secabitur.

Corollarium

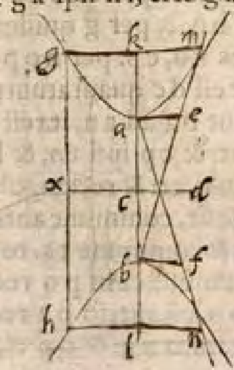
Ergo in Ellipsi, ordinatim applicata ex centro, et ex utraque parte sectioni occurrens erit ex diff. 10. h. diameter, et ex diff. 17. diameter coniugata, atque ut in sequenti ab Eutocio demonstratur, erit secunda diameter per 4 diff. consequentium, quæ semper media proportionalis est inter latera figuræ, h. est inter latus transversum et rectum.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVI.

Que sit oppositarum Sectionum Diameter Coniugata

SI per punctum, quod transuersum latus oppositarum sectionum bifariam diuidit, recta linea quædam ordinatim applicetur; ipsarum diameter erit, priori diametro coniugata.

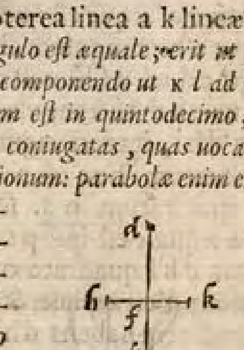
Sint oppositæ sectiones, quarum diameter a b: seceturq; a b bifariam in c puncto: & per c ordinatim applicetur c d. Dico c d diametrum esse coniugatam ipsi a b. sint enim, iuxta quas possunt ordinatim applicatæ a e, b f: & iunctæ a f, b e producantur: sumpto autem in altera sectione quouis puncto g, ducatur per g ipsi a b æquidistans g h, & à punctis g h ordinatim applicentur g k, h l: deinde a punctis k l ipsis a e, b f
34. primi æquidistantes ducantur k m, l n. Quoniam igitur æqualis est g k ipsi h l, erit g k qua-
13. huius dratum quadrato h l æquale. Sed quadratum g k æquale est rectangulo a k m; & quadratum h l rectangulo b l n. ergo a k m rectangulum rectangulo b l n æquale erit. &
14. huius. cum æquales sint a e, b f; erit ut a e ad a b, ita b f ad b a.
7. quinti ut autem a e ad a b, sic m k ad k b: & ut f b ad b a, sic n l ad l a. quare ut m k ad k b, sic n l ad l a. sed ut m k ad k b sumpta k a communi altitudine, ita rectangulum m k a ad rectangulum b k a: & ut n l ad l a sumpta communi altitudine b l, ita n l b rectangulum ad rectangulum a l b. ergo ut rectangulum m k a ad rectangulum b k a, ita rectangulum n l b ad ipsum a l b: & permutando ut m k a rectangulum ad rectangulum n l b, ita b k a rectangu-



A lum ad rectangulum a l b. est autem rectangulum m k a æquale rectangulo n l b. quare & b k a rectangulum rectangulo a l b; & propterea linea a k lineæ l b æqualis erit. estq; a c æqualis c b. ergo & tota k c toti c l: & ideo g x ipsi x h æqualis. linea igitur g h ab ipsa x c d bifariam secabitur: atque est ipsi a b æquidistans. ergo & x c d diameter erit coniugata ipsi a b;

EVTOCIVS.

A QVARE & b k a rectangulum rectangulo a l b: & propterea linea a k lineæ l b
14. sexti æqualis erit.] *Quoniam enim rectangulum b κ a ipsi a l b rectangulo est æquale; erit ut κ b ad a l, ita l b ad a κ: permutandoq; ut κ b ad b l, ita l a ad a k: & componendo ut κ l ad l b,*
9. quinti. *ita l k ad k a. æqualis igitur est a k ipsi b l. Animaduertendum autem est in quintodecimo, & sexto decimo theoremate Apollonio propositum fuisse, ut secundas & coniugatas, quas uocant, diametros inquireret; tum ellipsis; tum hyperbole, seu oppositarum sectionum: parabolæ enim eiusmodi diametrum non habet. Sed & illud notatione dignum est, diametros ellipsis intra recipi; hyperbolæ uero, & oppositarum sectionum diametros describi extra. Oportet autem lineas, iuxta quas possint ordinatim applicatæ, seu recta latera (græci ὀρθίας πλευρὰς dicunt) & lineas; quæ ipsis æquidistant, ad rectos angulos aptare: ordinatim uero applicatas, & secundas diametros non omnino. maxime tamen deberent in acuto angulo applicari, ut longe aliæ, & diuersæ ab eis, quæ recto lateri æquidistant, deprehenderentur. Post sextum decimum theorema diffinitiones tradit eius, quæ secunda diameter appellatur hiperbolæ & ellipsis. quibus quidem nos ex figuris lucem afferre conabimur. Sit hyperbole a b, cuius diameter g c b d: linea uero, iuxta quam possunt, quæ*



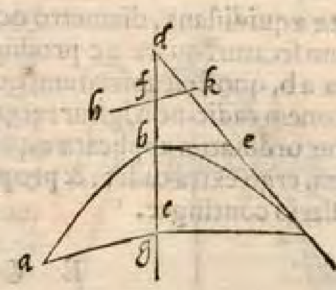
ad ipsam b e applicantur, sit b e. patet igitur b c in infinitum augeri propter sectionem, ut ostensum est in octauo theoremate. Sed ipsa b d, quæ subtenditur angulo extra triangulum per axem, terminata est. Itaque si bifariam secta b d in f: & à puncto a ordinatim applicata a g, per f lineæ a g æquidistantem duxerimus h f κ, ita ut sit h f ipsi f k æqualis, & quadratum h k æquale rectangulo d b e: erit h k secunda diameter: hoc enim fieri posse perspicuum est, quippe cum h k

extra

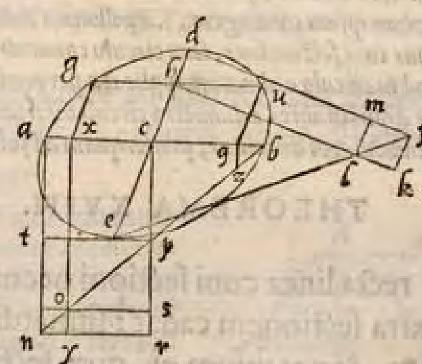
la linea dKC par hyperbolæ

46

extra ſectionem cadens in infinitum produci poſſit; atque à linea infinita cuilibet datæ lineæ æqualis facile abſcindatur. punctum autem f uocat centrum, & lineam fb, & alias quæ ſimiliter à puncto f ad ſectionem ducuntur, ex centro appellat. atque hæc in hyperbola, & oppoſitis ſectionibus. conſtat ergo utramque diametrum terminatam eſſe: primam quidem per ſe ſeex generatione ſectionis, ſecundam uero quòd media proportionalis ſit inter lineas terminatas, uidelicet inter primam diametrum, & eam iuxta quam poſſunt, quæ ad diametrum ordinatim applicantur. Sed in ellipſi id, quod dictum eſt, non dum apparet. Itaque cum ipſa in ſe ipſam uergat inſtar circuli; & omnes diametros intra recipiat, atque terminet; omnino in ellipſi, quæ media eſt proportionalis inter figuræ latera, ducta; per centrum ſectionis, & à diametro bifariam diuiſa, ab ipſa ſectione terminatur. quod ex iis, quæ dicta ſunt in quinto decimo theoremate oſtendere poſſumus. quoniam enim ut demonſtratum eſt, quæ ad lineam de applicantur æquidiſtantes ipſi ab, poſſunt ſpatia tertiæ proportionali earum adiacentia, uidelicet lineæ fd: erit ut de ad ab, ita ab ad df. quare ab media proportionalis eſt inter ed, df. & idcirco, quæ applicantur ad ab, ipſi de æquidiſtantes, poterunt ſpacia adiacentia tertiæ proportionali ipſarum de, ab, hoc eſt lineæ an. ergo de ſecunda diameter media eſt proportionalis inter ba, an figuræ latera. Oportet autem hoc ſcire etiam ob commodam figurarum deſcriptionem. nam cum inæquales ſint ab, de diametri, in circulo enim tantum ſunt æquales: conſtat lineam, quæ minori earum ad rectos angulos ducitur, ut hoc in loco df, tanquam tertia proportionalis ipſarum de, ab, utriſque maiorem eſſe. eam uero, quæ ad angulos rectos ducitur minori, ut an, tanquam tertia proportionalis ipſarum ab, de, utriſque eſſe minorem; ita ut quatuor continue proportionales ſint: ut enim an ad de, ſic eſt de ad ab, & ab ad df.



43



DIFFINITIONES SECVNDAE.

1 Punctum, quod hyperbolæ, & ellipſis diametrum bifariam diuidit, centrum ſectionis dicatur. 2 Et quæ à centro ad ſectionem perducitur, uocetur ex centro ſectionis. 3 Similiter & punctum quod tranſuerſum latus oppoſitarum ſectionum bifariam diuidit, centrum uocetur. 4 Quæ autem à centro ducitur æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt, mediamq; proportionem habet inter latera figuræ, & bifariam ſecatur à centro, ſecunda diameter appelletur. hyperbolæ uel Ellipsis

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

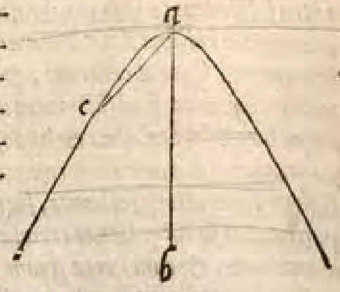
Prop. particularis Pro diametris ex generatione

SI in coni ſectione à uertice ipſius ducatur recta linea æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt; extra ſectionem cadet.

Sit coni ſectio, cuius diameter ab. Dico lineam, quæ à uertice, hoc eſt ab a puncto ducitur æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt; extra ſectionem cadere. Si enim fieri poteſt, cadat intra, ut ac. Quoniam igitur in coni ſectione ſumptum eſt quodlibet punctum c, linea quæ ab ipſo c intra ſectionem ducitur, ordinatim appli-

7.huius catæ æquidiſtans, diametro occurrit, atque ab ipſa bifariam ſecatur. quare a c producta bifariam ſecabitur à linea a b, quod eſt abſurdum; quoniam producta extra ſectionem cadit. non igitur recta linea, quæ à puncto a ducitur ordinatim applicatæ æquidiſtans, cadet intra ſectionem. ergo extra cadet: & propterea ſectionem ipſam neceſſario continget.

47 c a x huius ex utraque parte



EVTOCIVS.

Evclides in quinto decimo theoremate tertij libri elementorum oſtendit lineam, quæ ab extremitate diametri ad rectos angulos ducitur, cadere extra; atque circulum ipſum contingere. Apollonius autem hoc loco uniuerſale quoddam demonſtrat, quod tum tribus coni ſectionibus, tum circulo conuenire poteſt. hoc enim differt circulus à coni ſectionibus, quod in circulo ordinatim applicatæ perpendiculares ſunt ad diametrum; neque enim aliæ lineæ ipſis æquidiſtantes à diametro circuli bifariam diuiduntur: at in tribus ſectionibus non omnino perpendiculares ducuntur, præterquàm ad ſolos axes.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

Si recta linea coni ſectioni occurrens, productaq; in utramque partem extra ſectionem cadat: ſumatur autem aliquod punctum intra ſectionem, & per ipſum ei, quæ ſectioni occurrit æquidiſtans ducatur: ducta linea & producta ex utraquæ parte ſectioni occurret.

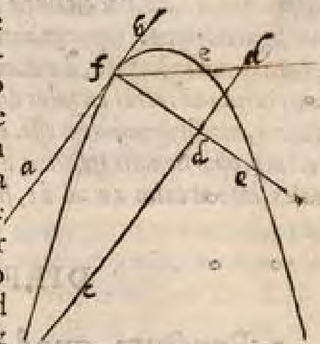
+ uel Sectionem secet

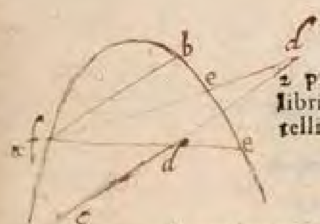
48

uel sectionem secat ut in figura infra posita

Sit coni ſectio, atque ipſi occurrens recta linea a f b, quæ producta in utramque partem extra ſectionem cadat; ſumpto autem intra ſectionem puncto aliquo c; per c ipſi a b æquidiſtans ducatur c d. Dico c d productam ex utraque parte ſectioni occurrere. Sumatur enim aliquod punctum in ſectione, quod ſit e: & iungatur e f. quoniam igitur linea a b lineæ c d æquidiſtat: ipſiq; a b occurrit recta linea e f: & c d producta ipſi e f occurret. & ſiquidem cadet inter e f puncta, perſpicuum eſt ipſam ſectioni occurrere; ſi uero extra e, ſectioni prius occurret. ergo c d producta, ut ad partes d e occurrit ſectioni. ſimiliter demonſtrabitur, & ad partes a f eidem occurrere. linea igitur c d producta ex utraque parte ſectioni occuret.

2 primi libri uitellionis.





cum se producta cadat extra p x huius

EVTOCIVS.

In aliquibus exemplaribus hoc theorema in parabola, & hyperbola tantummodo propoſitum oſtendit. Sed tamen præſtat propoſitionem uniuerſaliorem eſſe: quamquam de ellipſi, ut minime dubium, ab illis prætermiſſum uideri poteſt; linea enim c d intra ſectionem terminatam exiſtens, ſi producatur ex utraq; parte, neceſſario ipſam ſecabit. Sciendum autem eſt, eandem congruere demonſtrationem, etiam ſi linea a f b ſecet ipſam ſectionem.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

In omni ſectione coni recta linea, quæ à diametro ducitur ordinatim applicatæ æquidiſtans, cum ſectione conueniet.

Sit coni ſectio, cuius diameter a b: ſumaturq; aliquod punctum b in diametro; & per b ducatur b c æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata fuerit. Dico b c productam

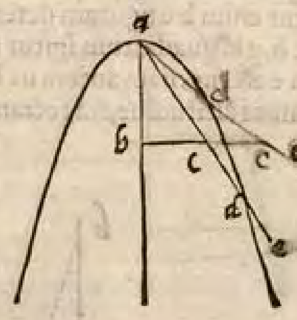
ctam cum ſectione conuenire. ſumatur enim quodlibet pũctum in ſectione d. eſt autem & punctum a in ſectione. ergo à puncto a ad d ducta linea intra ſectionem cadet. Quoniã igitur quæ ab a ducta eſt ordinatim applicatæ æquidiſtans, cadit extra ſectionem: & cum ipſa conuenit a d: itemq; b c æquidiſtat ei; quæ ordinatim applicata eſt. ſequitur ut b c etiam cum a d conueniat. & ſi quidem conuenit inter puncta a d; perſpicuum eſt cum ſectione quoque conuenire: ſi uero extra d, ut ad punctum e, prius conueniet cum ſectione. ergo recta linea, quæ à puncto b ducitur ordinatim applicatæ æquidiſtans, cum ſectione conueniet.

10 huius

17.huius

~~10 huius~~. 2. primi Vitellionis

49



THEOREMA XX. PROPOSITIO XX.

SI in parabola duæ rectæ lineæ à ſectione ad diametrum ordinatim applicentur, ut eorum quadrata inter ſeſe, ita erunt & lineæ, quæ ab ipſis ex diametro ad uerticem abſcinduntur.

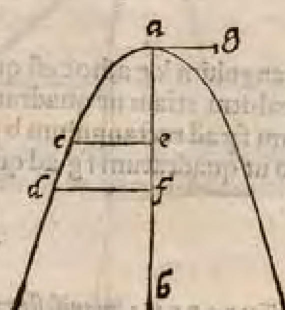
Mirabilis parabolæ proprietas.

SIT parabole, cuius diameter a b: & in ipſa ſumantur puncta quæpiam c d; à quibus ad a b ordinatim applicentur c e, d f. Dico lineam f a ad ipſam a e ita eſſe, ut quadratum lineæ d f ad quadratum c e. ſit enim linea a g, iuxta quã poſſunt ordinatim applicatæ. erit quadratum d f rectangulo f a g æquale: & quadratum c e æquale rectãgulo e a g. quare ut quadratum d f ad quadratum c e, ita rectangulum f a g ad rectangulum e a g. ut autem rectangulum f a g ad rectangulum e a g, ita linea f a ad lineam a e. ergo ut quadratum d f ad quadratum c e, ita erit f a ad a e.

50

11.huius

1. huius



EVTOCIVS.

AB hoc theoremate incipiens Apollonius deinceps in omnibus accidentia, quæ ipſi parabolæ inſunt, & non alij cuipiam magna ex parte oſtendit: deinde hyperbolæ, ellipſi, & circulo eadem ineſſe demonſtrat. Quoniam autem non inutile uiſum eſt ijs, qui mechanica tradunt, ob inſtrumentorum penuriam, ſæpe numero per continuata puncta coni ſectiones in plano deſcribere: ex hoc theoremate ſuppeditatur modus ſumendi ea puncta continuata, per quæ parabole regulæ adminiculo deſignatur. ſi enim exponamus rectam lineam, ut a b: & in ea ſumamus puncta continuata e f: à quibus ad rectos angulos ipſi a b lineas e c, f d ducamus, ſumpto in linea e c quolibet puncto c; longius quidem ab e ſi latiorem parabolam facere libuerit; ſi uero anguſtiorem propius: & fiat ut a e ad a f, ita quadratum e c ad quadratum f d: puncta c, d, in ſectione erunt. ſimiliter autem ſumentur & alia puncta, per quæ parabole ipſa deſcribetur.

Descriptio Parabolę p puncta continuata.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXI.

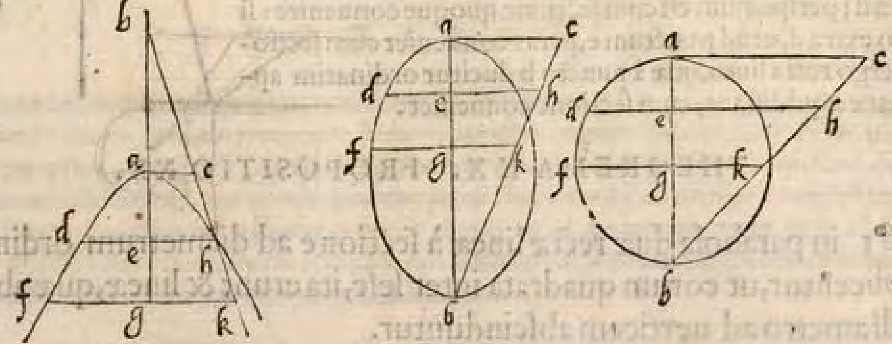
Si in hyperbola, uel ellipſi, uel circuli circumferentia, rectæ lineæ ordinatim ad diametrum applicentur: erunt quadrata earũ ad ſpacia contenta lineis; quæ inter ipſas, & uertices tranſuerſi lateris figuræ interijciuntur, ut figuræ rectum latus ad tranſuerſum: inter ſe ſe uero, ut ſpacia, quæ interiectis, ut diximus lineis, continentur.

aut in Ellipsi ordinatim applicentur ad ~~secundam~~ diametrum coniugatam

SIT hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b: linea autem, iuxta quam poſſunt applicatæ a c: & ad diametrum applicentur ordinatim d e, f g. Dico ut quadratum f g ad rectangulum a g b, ita eſſe lineam a c ad a b: ut uero

Figuram determinans quae!

quadratum f g ad quadratum d e, ita rectangulum a g b ad rectangulum a e b. iungatur enim b c figuram determinans: & per e g puncta ipsi a c æquidistantes ducantur
12. 13. 15. huius e h, g k. quadratum igitur f g æquale est rectangulo k g a: & quadratum d e rectangulo
4. sexti h e a. Quoniam autem ut k g ad g b, ita est c a ad a b: & ut k g ad g b, sumpta a g com-
1. sexti muni altitudine, ita rectangulum k g a ad rectangulum b g a: erit ut c a ad a b, ita re-

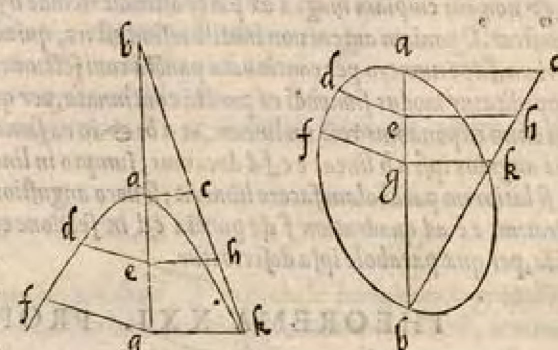


ctangulum k g a, hoc est quadratum f g ad rectangulum b g a. Eadem ratione demon-
11. quinti strabitur etiam ut quadratum d e ad rectangulum b e a; ita c a ad a b. ergo ut quadratum f g ad rectangulum b g a, ita quadratum d e ad b e a rectangulum: & permutando ut quadratum f g ad quadratum d e, ita rectangulum b g a ad rectangulum b e a.

EVTOCIVS.

THEOREMA *manifeste exponitur, & casum non habet. oportet autem scire lineam, iuxta quã possunt, uidelicet rectum figuræ latus in circulo quidem diametro æquale esse. quoniam enim c a ad a b est, ut quadratum d e ad rectangulum a e b: quadratum autem d e rectangulo a e b in circulo dumtaxat est æquale: sequitur ut & c a æqualis sit ipsi a b. sed illud quoque attendendum est lineas quæ in circuli circumferentia ordinatim applicantur, ad diametrum perpendiculares esse, atque in eadem recta linea, in qua sunt æquidistantes ipsi a c. Per hoc autem theorema, eo modo quo dictum est in parabola, hyperbolen & ellipsim regulæ adminiculo describemus. exponatur enim recta linea a b, & in infinitum producatur ad g: à puncto autem a ad rectos angulos ipsi a b ducatur a c: iunctaq; b c, & producta, sumantur in linea a g puncta quædam e g: à quibus ipsi a c æquidistantes ducantur e h, g k: & fiat a g k rectangulum æquale quadrato f g: & rectangulum a e h æquale ipsi d e quadrato. transibit iam hyperbole per puncta a d f. Similiter eadem & in ipsa ellipsi construemus.*

Descriptio hyperboles et Ellipsis per puncta continuata

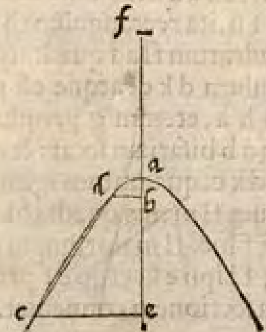


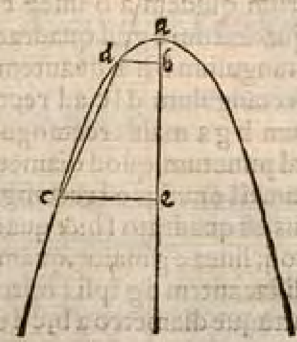
THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXII.

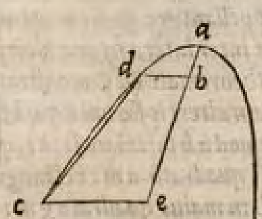
SI parabolen, uel hyperbolen recta linea in duobus punctis secet, nõ conueniens cum diametro sectionis intra sectionem; producta cum eadem diametro extra sectionem conueniet.

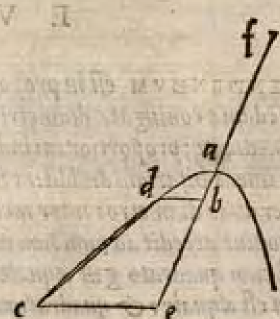
Sit

SIT parabole, uel hyperbole, cuius diameter a b; & secet quæpiam recta linea sectionem in duobus punctis c d. Dico lineam c d productam conuenire cum ipsa a b extra sectionem. applicentur enim à punctis c d ordinatim lineæ c e, d b: & sit primum sectio parabole. Quoniam igitur in parabola, ut quadratum c e ad quadratum d b: ita est e a ad a b: maior autem e a, quam a b: erit quadratum c e quadrato d b maius. quare & linea c e maior ipsa d b. & sunt inter se se æquidistantes. ergo c d producta cum diametro a b extra sectionē conueniet. sed sit sectio hyperbole. itaque quoniam in hyperbola ut quadratum c e ad quadratum d b, ita est rectangulum f e a ad rectangulum f b a; quadratum c e maius erit quadrato d b. & sunt æquidistantes. linea igitur c d producta cum diametro sectionis extra sectionem conueniet. A



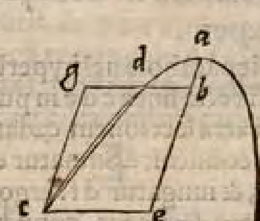






FED. COMMANDINVS.

ET sunt inter sese æquidistantes. ergo c d producta cum diametro a b extra sectionem conueniet.] *Ducatur à puncto c linea c g diametro e b æquidistans; & producta b d, ipsi c g occurrat in g. Quoniam igitur c e, d b inter se se æquidistant; itemq; e b, c g: erit ipsum e g parallelogrammum: & anguli b e c, e c g æquales duobus rectis. quare b e c, e c d anguli duobus rectis sunt minores. linea igitur c d cum ipsa e a ex parte a conueniet. quòd cum non conueniat intra sectionem, extra conuenire necessarium est.* A 29. primi.



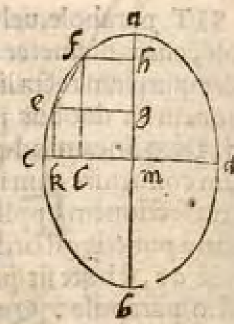
THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

SI ellipsim recta linea secet inter duas diametros, producta cum utraque earum extra sectionem conueniet.

SIT ellipsis, cuius diametri a b, c d: & secet quædam recta linea sectionem, uidelicet ipsa e f, inter duas diametros a b, c d interiecta. Dico e f productam conuenire cū utraque earum extra sectionem. applicentur enim à punctis e f ordinatim ad diame-

21.huius trum quidem a b lineæ e g, f h; ad c d uero e k, f l. est igitur ut quadratum e g ad quadratum f h, ita rectangulum b g a ad rectangulum b h a: ut autem quadratum f l ad quadratum e k, ita

A rectangulum d l c ad rectangulum d k c. atque est rectangulum b g a maius rectangulo b h a; etenim g propius accedit ad punctum, quod diametrum a b bifariam secat: & rectangulum d l c maius est rectangulo d k c. quadratum igitur e g maius est quadrato f h: & quadratum f l maius quadrato e k: idcircoq; linea e g maior, quàm ipsa f h: & f l maior, quàm e k. æquidistat autem e g ipsi f h, itemq; f l ipsi e k. ergo e f producta cũ utraque diametro a b, c d extra sectionem conueniet.



EVTOCIVS.

Attendendvm est in propositione Apollonii duas diametros dicere. non simpliciter quascunque, sed quæ coniugatæ diametri appellantur; quarum utraque ordinatim applicatæ æquidistãs ducitur, mediaq; proportionem habet inter latera figuræ alterius diametri: & idcirco alteri æquidistantes lineas bifariam diuidit: ut in theoremate est demonstratum. nisi enim ita sit continget lineam inter duas diametros inter mediam alteri ipsarum æquidistare: quod non ponitur. quoniam autem g propius accedit ad punctum m, quod a b bifariam secat, quàm ipsum h: rectangulum quidem b g a unà cum quadrato g m æquale est quadrato a m: rectangulum uero b h a unà cum quadrato h m eidem est æquale: & quadratum h m maius quadrato g m: erit rectangulum b g a rectangulo b h a maius.

coniugatæ diametri. A 16.huius A. 5.secundi

FED. COMMANDINVS.

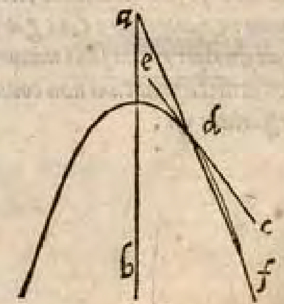
Hoc idem etiam in ipso circulo euenit, sumptis duabus diametris coniugatis: quod eodem prorsus modo demonstrabitur.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXIIII.

A Si parabolæ uel hyperbolæ recta linea in uno puncto occurrens, & producta ex utraque parte extra sectionem cadat; cum diametro conueniet.

Sit parabole uel hyperbole, cui⁹ diameter a b: occurratq; ipsi recta linea c d e in puncto d: & producta ex utraq; parte extra sectionem cadat. Dico lineam c d e cum diametro a b conuenire. Sumatur enim aliquod punctum f in sectio-

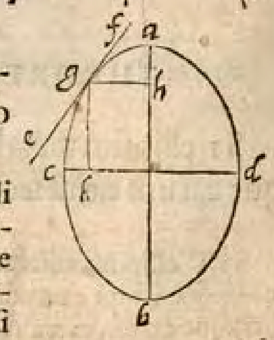
22.huius ne, & iungatur d f. ergo d f producta conueniet cum diametro sectionis. conueniat in a puncto. est autem c d e inter sectionem & lineam f d a. linea igitur c d e producta cum diametro extra sectionem conueniet.



THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

Si ellipsi recta linea occurrens inter duas diametros, & producta ex utraque parte cadat extra sectionem; cum utrisque diametris conueniet.

Sit ellipsis, cuius diametri a b, c d: & ipsi occurrat recta linea e f inter duas diametros in puncto g: & producta ex utraque parte extra sectionem cadat. Dico e f cum utrisque diametris a b, c d conuenire. applicentur enim à puncto g ad diametros a b, c d lineæ g h, g k. itaque quoniam g k æquidistat ipsi



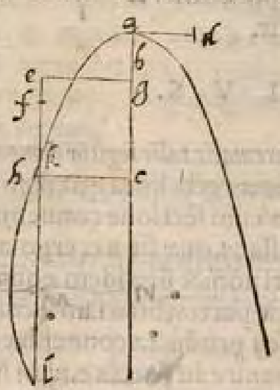
ab:

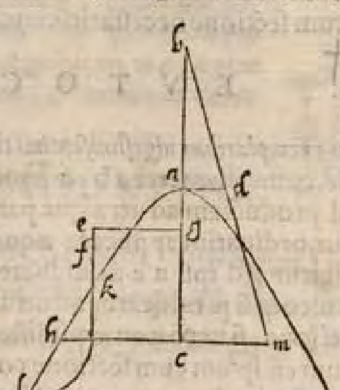
a b: conuenit autem quædam linea g f cum g k, & cum ipsa a b conueniet. Eodem mo- ex 1. primi libri Vitellionis.
do & f e cum diametro c d conuenire demonstrabitur.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVI.

Si in parabola, uel hyperbola recta linea ducatur diametro sectionis æquidistans; in uno tantum puncto cum sectione conueniet.

SIT primum parabole, cuius diameter a b c: rectum autem latus a d: & ipsi a b æquidistans ducatur e f. Dico e f productam cum sectione conuenire. Sumatur enim in ipsa e f aliquod punctum e; à quo ducatur e g ordinatim applicatæ æquidistans; & quadrato e g maius sit rectãgulum d a c: à puncto autem c ordinatim applicetur c h.
ergo quadratum h c æquale est rectangulo d a c: atque est rectangulum d a c maius
quadrato e g. quadratum igitur h c quadrato e g maius erit; & idcirco linea h c maior 11. huius
linea e g: & sunt æquidistantes inter se se. ergo e f producta secabit h c: proptereaq; prius
conueniet cum sectione. conueniat in k. Dico in uno tantum puncto k conuenire. si enim fieri potest, conueniat etiam in l. Quoniam igitur parabolen recta linea secat in

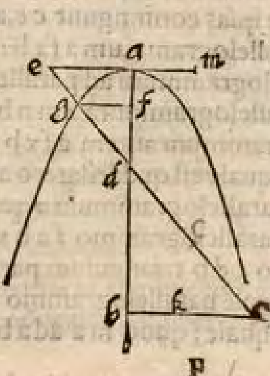




duobus punctis, si producatur conueniet cum diametro sectionis; quod est absurdũ, 22. huius
positum enim est ipsi æquidistare. ergo e f in uno tantum puncto cum sectione conueniet. Sit deinde sectio hyperbole: transuersum uero figuræ latus a b: & a d rectum: iungaturq; b d, & producatur. ijsdem igitur, quæ supra, dispositis, ducatur à puncto c ipsi a d æquidistans c m. & quoniam rectangulum m c a maius est rectangulo d a c; ipsiq; m c a æquale est quadratum c h: & d a c rectangulum maius quadrato g e: erit & 12. huius
quadratum c h quadrato g e maius: & ideo linea c h maior linea g e. ex quibus eadem, p constr
quæ supra diximus, necessario sequuntur.

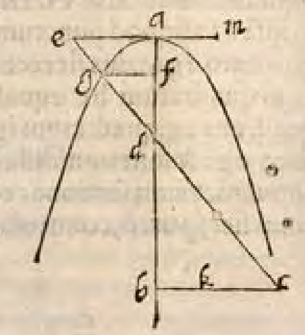
THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVII.

Si parabolæ diametrum secet recta linea; producta in utramque partem cum sectione conueniet.



SIT parabole, cuius diameter a b: & ipsam a b secet quæpiam recta linea c d intra sectionem. Dico c d productam in utramque partem cum sectione conuenire. ducatur enim à puncto a ordinatim applicatæ æquidistans a e.
ergo a e extra sectionem cadet. itaque uel c d ipsi a e æ- 17. huius
quidistat, uel non. & si quidem æquidistat, ordinatim
applicata est. quare producta in utramque partem conue- 19. huius
niet cum sectione. Quod si non æquidistat, producatur, & conueniat cum a e in e puncto. constat igitur ipsam cum sectione conuenire ad partes e. si enim conuenit cum

a c, multo prius ſectioni occurrit. Dico rurſus eandem, & ad alteras partes productam conuenire cum ſectione. ſit enim m a linea, iuxta quam poſſunt: & g f ordinatim applicetur: quadratum autem a d æquale ſit rectangulo b a f: & ordinatim applicata b k conueniat cum d e in c puncto. Quoniam igitur rectangulum f a b æquale
14. ſexti eſt quadrato a d; erit ut b a ad a d, ita d a ad a f: quare & reliqua b d ad reliquam d f,
19. quinti. ut b a ad a d. & propterea ut quadratum b d ad quadratum d f, ita quadratum b a ad
21. ſexti cor. 20. ſexti. quadratum a d. Rurſus quoniam quadratum a d æquale eſt rectangulo b a f, ut b a ad a f, ſic erit quadratum b a ad quadratum a d; hoc eſt quadratum b d ad quadratū d f.
4. & 22. ſexti ut autem quadratum b d ad quadratum d f, ſic quadratum b c ad quadratum f g: & ut b a ad a f, ſic rectangulum b a m ad rectangulum f a m: ut
1. ſexti.
11. quinti igitur quadratum b c ad quadratum f g, ita rectangulum
14. quinti b a m ad ipſum f a m. & permutando ut quadratum b c ad rectangulum b a m, ita quadratum f g ad rectangulum
11. huius f a m. at quadratum f g æquale eſt f a m rectangulo, propter
14. quinti ſectionem. ergo & quadratum b c rectangulo b a m æquale erit. eſt autem a m rectum figuræ latus: & b c ordinatim applicata. ſectio igitur tranſit per c punctum: & linea c d in c cum ſectione neceſſario conuenit.

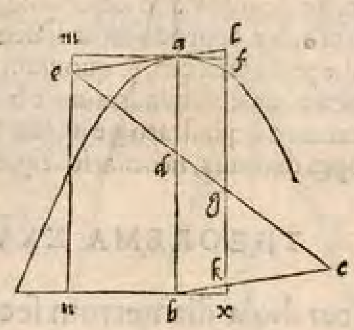


EVTOCIVS.

In aliquibus exemplaribus uigeſimiſeptimi theorematis talis legitur demonſtratio.

Sit parabole, cuius diameter a b: & hanc ſecet recta linea quædam g d intra ſectio-
17. huius nem. Dico g d productam ad utraſque partes cum ſectione conuenire. ducatur enim per a punctum, ordinatim applicatæ æquidiſtans, quæ ſit a e. ergo a e cadet extra ſectionem. uel igitur g d ipſi a e æquidiſtat, uel non: & ſiquidem æquidiſtet, ordinatim applicata eſt: ideoq; ſi producatur ad utraſque partes, biſariam ſecta à diametro con-
19. huius ueniet cum ſectione: ſi uero non æquidiſtet, ſed producta conueniat cum a e in e puncto; perſpicuum eſt ipſam cum ſectione conuenire ad partes e. nam ſi cum a e conuenit multo prius ſectioni occurrat neceſſe eſt. Dico etiam ad alteras partes productam cum ſectione conuenire. ſit enim m a linea, iuxta quam poſſunt: & in rectum ipſi producatur a f. ergo m a ad a b eſt perpendicularis.

A fiat ut quadratum a e ad triangulum a e d, ſic linea m a ad a f: & per puncta m f, ipſi a b æquidi-
B ſtantes ducantur f g k, m n. cum igitur quadrilaterum ſit l a d g; & poſitione data l a, ducatur c k b ipſi l a æquidiſtans, quæ abſcindat c k g triangulum quadrilatero l a d g æquale: & per b ipſi f a m æquidiſtans ducatur x b n. Itaque quoniam ut quadratum a e ad triangulum a e d, ita eſt linea m a ad a f: & ut quadratum a e ad a e d triangulum, ita quadratum c b ad triangulum d c b, etenim a e, c b inter ſe ſe æquidiſtant: & ipſas coniungunt c e, a b: ut autem m a ad a f, ita a m n b parallelogrāmum ad parallelogrammum a f x b: erit ut quadratum c b ad triangulum c d b, ita a m n b parallelogrammum ad parallelogrammum a f x b: & permutando ut quadratum c b ad parallelogrammum a m n b, ita c d b triangulum ad parallelogrammum a f x b. parallelogrammum autem a f x b triangulo c d b eſt æquale. quoniam enim c g k triangulum æquale eſt quadrilatero a l d g: & quadrilaterum g d b k utrique commune: erit l a b k parallelogrammum æquale triangulo c d b. Sed l a b k parallelogrammum æquale eſt parallelogrammo f a b x; quod ſit in eadem baſi a b, & in eiſdem parallelis a b, l x. ergo c d b triangulum parallelogrammo x f a b æquale erit. quare & quadratum c b æquale parallelogrammo a m n b: parallelogrammum autem m a b n rectangulo m a b æquale; quod m a ad a b ſit perpendicularis. ergo rectangulum m a b eſt æquale quadrato



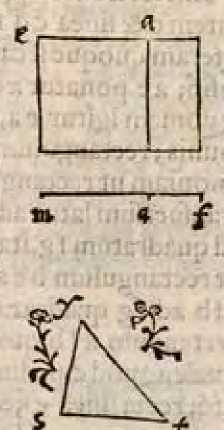
drato

drato c b. atque est m a rectum figuræ latus; a b diameter; & c b ordinatim applicata, cum ipsi a e æquidistet. ex quibus sequitur punctum c esse in sectione. ergo d g c in c cum sectione conuenit. quod demonstrandum proponebatur.

EIVSDEM COMMENTARIVS IN PROPOSITVM THEOREMA.

FIAT ut quadratum a e ad triangulum a e d, sic linea m a ad a f.] *Demonstratum est hoc in commentarijs in undecimum theorema. si enim describentes quadratum lineæ a e ipsius lateri apposuerimus spatium triangulo a e d æquale; factum iam erit quod quærebamus.* A

Cum igitur quadrilaterum sit l a d g, & positione data l a, ducatur c k b ipsi l a æquidistans, quæ abscindat c k g triangulum quadrilatero l a d g æquale.] *Hoc ita faciemus. si enim, ut in elementis didicimus, dato rectilineo, uidelicet quadrilatero l a d g æquale, & triangulo dato a e d simile constituerimus triangulum s t y, ita ut latus s y lateri a d respondeat; & fecerimus g k ipsi s y æqualem, & t y æqualem g c; iuncta linea c k factum erit, quod quæritur. Quoniam enim angulus ad y æqualis est angulo ad d, hoc est ei, qui ad g; erit triangulum c g k æquale, ac simile triangulo s t y. & angulus c angulo e æqualis; qui quidem alterni sunt. linea igitur c k æquidistat ipsi a e. constat autem lineam m a tangere sectionem, quando a b sit axis; alioquin ipsam secat; & omnino ad diametrum perpendicularis ducitur.* B 25. sexti 27. primi



THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXVIII.

Si recta linea unam oppositarum sectionum contingat; sumatur autem punctum intra alteram sectionem: & per ipsum linea contingenti æquidistans ducatur: producta ad utrasque partes cum sectione conueniet. uel secet uel secanti

SINT oppositæ sectiones, quarum diameter a b: & sectionem, in qua est a ~~contingat~~ secet uel contingat quædam recta linea c d: sumatur autem aliquod punctum e intra alteram sectionem: & per e ducatur e f ipsi c d æquidistans. Dico lineam e f productam ad utrasque partes cum sectione conuenire. Quoniam enim ostensum est lineam c d productam conuenire cum diametro a b: atque est e f ipsi æquidistans: linea e f producta cum diametro conueniet. conueniat autem in g: & ipsi g b æqualis ponatur a h. deinde per h ducatur h k æquidistans ~~et~~ e f: & ipsa k l ordinatim applicata, ponatur g m æqualis l h: ducaturq; m n ordinatim applicatæ æquidistans: & g ~~m~~ conueniat cum m n in n. si ambo in directum producatur. Itaque quoniam k l ipsi m n æquidistat; & k h ipsi g n: & est l m una, eademq; recta linea: triangulum k h l simile est triangulo g m n. est autem l h æqualis g m. quare & k l ipsi m n æqualis erit. ideoq; quadratum k l æquale quadrato m n. Rursus quoniam l h æqualis est g m: & a h ipsi b g: communis autem a b: erit b l æqualis a m: & propterea rectangulum b l a rectangulo a m b æquale. ut igitur rectangulum b l a ad quadratũ k l, ita rectangulum a m b ad quadratum m n. Sed ut rectangulum b l a ad k l quadratum; ita transuersum figuræ latus ad latus rectum. quare ut rectangulum a m b ad quadratum m n, ita erit latus transuersum ad rectũ. ex quibus colligitur, punctum n in sectione esse. ergo linea e f producta in puncto n cũ sectione conueniet. similiter ostendemus, si ex altera parte producatur, cum sectione conuenire. 24. huius 21. h. 21. huius

uel ad c d. tunc eum sectionē conuenias p 18. h

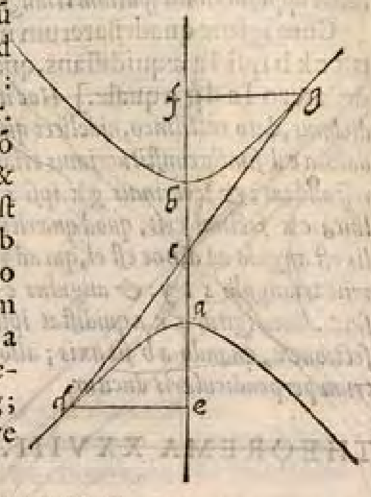
EVTOCIVS.

Quod si c d hyperbolen secet, eadem nihilominus sequentur, quemadmodum in decimaoctauo theoremate.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXIX.

Si in oppositis sectionibus recta linea per cẽtrum ducta occurrat uni sectioni, ulterius producta alteram quoque secabit.

Sint sectiones oppositæ, quarum diameter a b: centrũ D autem c: & linea c d sectionem a d secet. Dico ipsam c d alteram quoque secare. ordinatim enim applicetur d e: ipsiq; a e ponatur æqualis b f: & f g ordinatim ducatur. Quoniam igitur e a, b f æquales sunt; & a b utrisque cõmunis; rectangulum b e a rectangulo a f b est æquale. & 21. huius *quoniam ut rectangulum b e a ad quadratum d e, ita est transuersum latus ad rectum. Vt autem rectangulũ a f b ad quadratum f g, ita latus transuersum ad rectum. ergo ut rectangulum b e a ad quadratum d e; sic rectangulum a f b ad f g quadratum. Sed æquale est rectangulum b e a rectangulo a f b. quadratũ igitur d e quadrato f g est æquale. Quòd cum linea e c æqualis sit c f; & d e ipsi f g; sitq; recta linea e f; & e d ipsi f g æquidistans: erit & d g recta linea. ergo c d sectionem quoque alteram secabit.



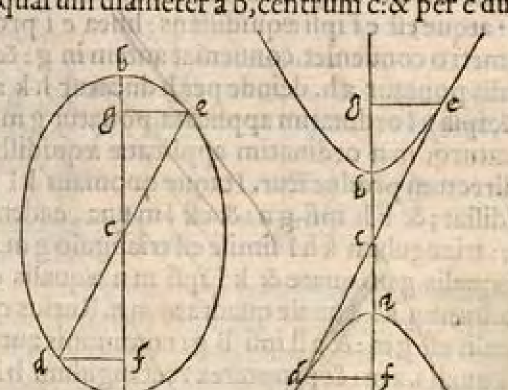
FED. COMMANDINVS.

ERIT & d g recta linea.] *Sequitur enim ex iam dictis triangulum c d e triangulo c g f simile esse: angulumq; d c e angulo g c f æqualem. sed cum e f recta linea sit, anguli g c f, g c e duobus rectis sunt æquales: itemq; anguli d c e, d c f. ergo & reliqui g c e, d c f inter se æquales erunt: &* 13. primi 14. primi. *idcirco g c f, f c d æquales duobus rectis. quare d g recta linea sit necesse est.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

Si in ellipsi, uel oppositis sectionibus recta linea ducatur, ad utrasque centri partes sectioni occurrens; ad centrum bifariam secabitur.

SIT ellipsis, uel oppositæ sectiones, quarum diameter a b, centrum c: & per c ducatur recta linea d c e. Dico c d ipsi c e æqualem esse. ordinatim enim applicẽtur d f, e g. & quoniam ut rectangulum 21. huius b f a ad quadratum f d,* ita est transuersum latus ad rectum: & ut rectãgulum a g b ad quadratum g e, ita latus transuersum ad rectum: erit ut rectangulum b f a ad quadratum f d, ita rectangulũ a g b ad quadratum g e: & permutando ut rectangulum b f a ad rectangulum a g b, ita d f quadratum ad quadratum g e. ut autem quadratum d f ad quadratum g e, ita quadratum f c ad ipsum c g quadratum. ergo permutando ut rectã-



A gulum b f a ad quadratum f c, ita rectangulum a g b ad quadratum c g.* ut igitur in ellipsi componendo, in oppositis uero conuertendo, & per cõuersionem rationis, quadratum a c ad quadratum c f, sic quadratum b c ad quadratum c g: & permutando. quadratum autem a c æquale est quadrato c b. ergo & quadratum f c quadrato c g B æquale erit. idcircoq; linea f c lineæ c g æqualis.* & cum d f, g e inter se æquidistent, necesse est lineam d c ipsi c e æqualem esse.

EVTO

EVTOCIVS.

Vt igitur in ellipsi componendo, in oppositis uero conuertendo, & per conuersionem rationis.] *In ellipsi quidem ita dicemus. Quoniam ut rectangulum a f b ad quadratum d f, ita est rectangulum a g b ad quadratum g e. Vt autem quadratum d f ad quadratum f c, ita quadratum e g ad quadratum g c: erit ex æquali, ut rectangulum a f b ad quadratum f c, ita rectangulum a g b ad quadratum g c. & componendo ut rectangulum a f b unà cum quadrato f c ad quadratum f c, hoc est quadratum a c ad quadratum c f (etenim recta linea a b secatur in partes æquales ad punctum c, & in partes inæquales ad f) ita rectangulum a g b unà cum quadrato g c ad quadratum g c; hoc est propter eandem caussam, quadratum b c ad c g quadratum. & permutando ut quadratum a c ad quadratum c b, ita f c quadratum ad quadratum c g. At uero in oppositis hoc modo. Quoniam ex æquali est ut rectangulum b f a ad quadratum f c, ita rectangulum a g b ad c g quadratum: erit conuertendo ut quadratum f c ad rectangulum b f a, ita quadratum c g ad rectangulum a g b: & per conuersionem rationis, ut quadratum f c ad quadratum c a, ita quadratum g c ad c b quadratum. nam cum linea a b bifariam secetur in c, atque ei adijciatur f a, erit rectangulum b f a unà cum quadrato a c æquale quadrato c f. quare c f quadratum exuperat rectangulum b f a, ipso a c quadrato. pulchre igitur dictum est sequi illud per conuersionem rationis.* A 5. secūdi. 6. secūdi.

FED. COMMANDINVS.

ET cum d f, g e inter se æquidistent, necesse est lineam d c ipsi c e æqualem esse.] *Quoniam enim æquidistant d f, g e, sequitur angulum c f d æqualem esse angulo c g e: & propterea triangulum c d f triangulo c e g simile. ergo ut f c ad c d, ita g c ad c e: & permutando ut f c ad c g, ita d c ad c e. æquales autem sunt f c, c g, ut demonstratum est. ergo & d c, c e æquales erunt.* B

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

SI in transuerso figuræ latere hyperboles sumatur aliquod punctum, non minorem abscindens ad uerticem sectionis, quàm sit dimidia transuersi lateris figuræ; & ab ipso recta linea sectioni occurrat: si producatur, intra sectionem, ad sequentes ipsius partes cadet.

Sit hyperbole, cuius diameter a b: & in ipsa sumatur punctum aliquod c, non minorem abscindens lineam c b, quàm sit ipsius a b dimidia: & occurrat sectioni quædam recta linea c d. Dico c d productam intra sectionem cadere. Si enim fieri potest, cadat extra sectionem, ut c d e: & à quouis puncto e ordinatim applicetur e g; itemq; ipsa d h. Sit autem primum linea a c æqualis c b. itaque quadratum e g ad quadratum d h maiorem proportionem habet, quam quadratum f g ad quadratum d h: ut autem quadratum e g ad d h quadratum, sic quadratum g c ad quadratum c h; propterea quod e g ipsi d h sit æquidistans: & ut quadratum f g ad quadratum d h, sic rectangulum a g b ad rectangulum a h b, propter sectionem. quadratum igitur g c ad quadratum c h proportionem maiorem habet; quàm rectangulum a g b ad rectangulum a h b: & permutando quadratum g c ad rectangulum a g b habet maiorem proportionem, quàm quadratum c h ad rectangulum a h b. ergo diuidendo quadratum c b ad rectangulum a g b maiorem habet proportionem, quàm quadratum c b ad rectangulum a h b. quod fieri non potest. non igitur linea c d e cadet extra sectionem. quare intra cadet; & id circo quæ ab aliquo puncto lineæ a c ad sectionem ducitur, multo magis cadet intra, quoniam & intra lineam c d cadet.

8. quinti.
4. & 22. sexti.
21 huius
17. quinti elemētorum apud Campanum. 29. eiusdē
A
B
C

Corollarium

Ergo quecunque tangens hyperbolē occurret ipsius transverso lateri semper inter centrum, et verticem.

EVTOCIVS.

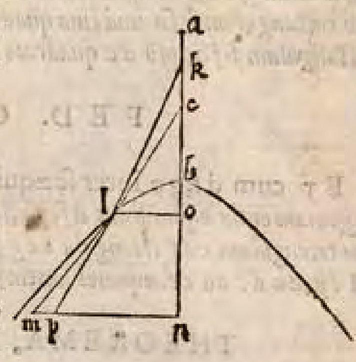
proportionem

A ERGO diuidendo quadratum c b ad rectangulum a g b maiorem habet, quam quadratum c b ad rectangulum a h b.] *Quoniam enim recta linea a b bifariam secatur in*
6.secūdi *c: & ipsi adijcitur linea b g, rectangulum a g b unà cum quadrato c b æquale est quadrato c g. ergo c g quadratum superat rectangulum a g b quadrato c b: & propter eandem caussam quadratum c h superat rectangulum a h b, ipso c b quadrato. recte igitur Apollonius dixit, diuidendo illud concludi.*

FED. COMMANDINVS.

B Quod fieri non potest.] *Quadratum enim c b ad rectangulum a h b maiorem proportio-*
8.quinti. *nem habet, quàm ad rectangulum a g b, quippe cum rectangulum a g b ipso a h b maius sit.*

C Et idcirco quæ ab aliquo puncto lineæ a c ad sectionem ducitur, multo magis cadet intra.] *Sumatur enim in linea a c punctum k, à quo ducta k l ad sectionem producatur in m. Dico lineam k l m multo magis intra sectionem cadere. Si enim fieri potest, cadat extra, ordinatimq; applicentur m n, l o: & iuncta c l producatur, ut secet m n in p. cadet c l p intra sectionem, ex ijs quæ proxime demonstrata sunt. Itaque quoniam lineæ m n, l o æquidistant, erunt triangula l k o, m k n similia: & similia inter se l c o, p c n. Sed trianguli l k o angulus k l o maior est angulo c l o trianguli l c o. ergo & angulus k m n angulo*
16. & 32. primi elementorū *c p n maior erit, interior exteriore, quod fieri non potest. At si ponatur l m cadere quidem intra sectionem, sed extra lineam l p, uel in ipsam, nihilominus absurdum sequetur. constat ergo lineam k l m multo magis, quàm c l p intra sectionem cadere. quod quidem demonstrandum proponebatur.*



COROLLARIVM.

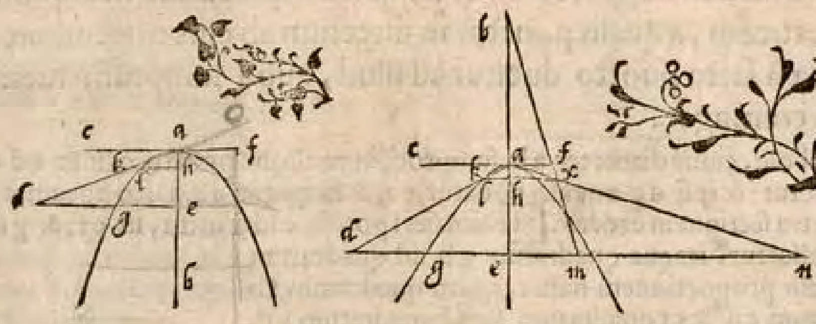
Ex iam demonstratis sequitur lineam, quæ hyperbolen contingit, si producatur secare diametrum inter uerticem & centrum sectionis.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXII.

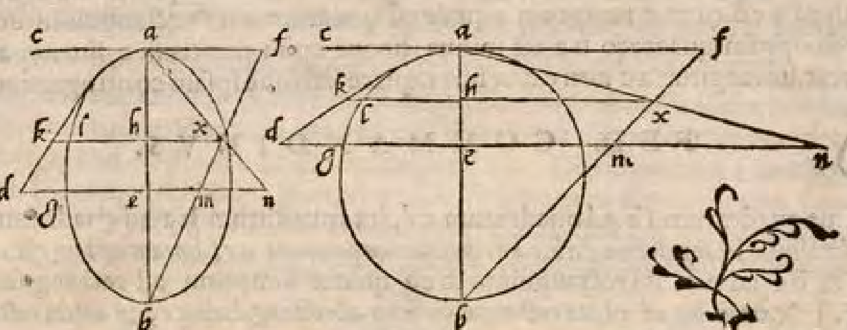
SI per uerticem sectionis coni recta linea ordinatim applicatæ æquidistans ducatur, sectionem continget: & in locum, qui inter coni sectionem & rectam lineam interiicitur, altera recta linea non cadet.

Sit coni sectio prius parabole, cuius diameter a b; & à puncto a ducatur a c ordi-
17.huius natim applicatæ æquidistans. cadet linea a c extra sectionem, quod supra demonstratum est. Dico in locum, qui inter lineam a c & sectionem interiicitur, alteram rectam lineam non cadere. Si enim fieri potest, cadat, ut a d: sumaturq; in ipsa quoduis punctum d: & ordinatim applicetur d e. Sit autem linea a f, iuxta quam possunt, quæ à sectione ordinatim ducuntur. & quoniam quadratum d e ad quadratum e a
8.quinti. maiorem proportionem habet, quàm quadratum g e ad e a quadratum: estq; qua-
11.huius. dratum g e æquale rectangulo f a e. quadratum igitur d e ad quadratum e a maio-
lemm.12 decimi. rem proportionem habet, quàm rectangulum f a e ad quadratum e a; hoc est quàm f a ad a c. Itaque fiat ut quadratum d e ad quadratum e a, sic f a ad a h: & per h ducatur h i k æquidistans e d. Quoniam igitur est, ut quadratum d e ad quadratum e a, sic linea f a ad ipsam a h, hoc est rectangulum f a h ad quadratum a h: & ut quadratum

dratum d e ad quadratum e a, ita quadratum k h ad h a quadratum: rectangulo autem f a h æquale est quadratum l h. quare ut quadratum k h ad quadratum h a, sic quadratum l h ad quadratum h a. æqualis est igitur linea k h ipsi h l. quod est absurdum. non ergo in locum inter rectam lineam a c & sectionem altera recta linea cadet. 11. huius



Sit sectio hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b: & rectum figuræ latus a f. iuncta autem b f producatur: & à puncto a ordinatim applicetur a c, quæ extra sectionem cadet, ut ostensum est. Dico in locum, qui inter lineam rectam a c, & sectionem interiicitur, alteram rectam lineam non cadere. cadat enim, si fieri potest, ut a d: & in ipsa sumatur quoduis punctũ d, à quo d e ordinatim applicetur: & per e ducatur e m ipsi a f æquidistans. Et quoniam g e quadratum æquale est rectangulo a e m, fiat rectangulum a e n quadrato d e æquale: & iuncta a n secet f m in puncto x, deinde per x ipsi f a æquidistans ducatur x h: & per h ducatur h l k æquidistans a c. Itaque cum quadratum d e æquale sit rectangulo a e n, erit ut 12. & 13. huius. 14 uel 17 sexti.



n e ad e d, ita d e ad e a: & idcirco ut linea n e ad e a, ita quadratum d e ad quadratum e a. Sed ut n e ad e a, ita x h ad h a: & ut quadratum d e ad quadratum e a, ita quadratum k h ad h a quadratum. ut igitur x h ad h a, sic quadratum k h ad quadratum h a. ergo k h media proportionalis est inter x h, h a: & propterea quadratum k h æquale rectangulo a h x. est autem & quadratum l h rectangulo a h x æquale propter sectionem. ergo quadratum k h æquale est quadrato h l: quod fieri non potest. in locum igitur, qui est inter rectam lineam a c & sectionem altera recta linea non cadet. cor. 20. sexti

E V T O C I V S.

In septimodecimo theoremate simpliciter ostendit rectam lineam, quæ per uerticem ducitur, ordinatim applicatæ æquidistans, sectionem ipsam contingere. hoc autem loco, id quod in elementis circulo tantum inesse demonstratur, uniuerse in omni coni sectione ostendit. oportet autem scire, quod & illic demonstratum est, nullum fortasse sequi absurdum, si linea curua inter sectionem & lineam rectam cadat. at uero ut cadat recta linea, fieri non potest. secabit etenim ipsa, non continget sectionem, quoniam duæ rectæ lineæ in eodem puncto contingentes esse non possunt. Cum autem hoc theorema multifariam demostretur in diuersis editionibus, nos simpliciorem, & manifestiorem demonstrationem secuti sumus.

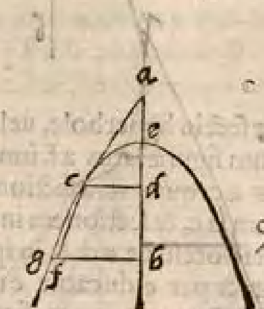
Tangens Parabolæ quomodo ducatur ex dato puncto in Sectione

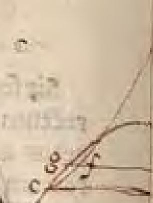
69

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

SI in parabola sumatur aliquod punctum, à quo recta linea ad diametrum ordinatim applicetur, & ei, quæ ab ipsa ex diametro abscinditur ad uerticem, æqualis ponatur in directum ab eius extremitate: recta linea, quæ à facto puncto ducitur ad illud, quod sumptum fuerat, sectionem continget.

Sit parabole, cuius diameter a b: sumptoq; in ea aliquo puncto c, linea c d ordinatim applicetur: & ipsi d e æqualis ponatur e a, & iungatur a c. Dico lineam a c productam extra sectionem cadere. Si enim fieri potest, cadat intra, ut c f: & g b ordinatim applicetur. 8. quinti itaque quadratum g b ad quadratum c d maiorem proportionem habet, quàm quadratum f b ad quadratum c d: A & ut quadratum f b ad quadratum c d, 20. huius ita quadratum b a ad quadratum a d: ut autem quadra- 13. quinti tum g b ad c d quadratum, ita linea b e ad e d. ergo b e ad e d maiorem proportionem habet, quam b a quadratum B ad quadratum a d: sed ut b e ad e d, ita rectangulum b e a quater sumptum ad rectangulum a e d quater. rectangulum igitur b e a quater ad rectangulum a e d quater maiorem habet proportionem, quam quadratum b a ad qua- 27. quinti apud Cã. dratum a d: & permutando rectangulum b e a quater ad quadratum a b maiorem proportionem habet, quàm rectangulum a e d quater ad C quadratum a d: quod fieri minime potest: nam cum linea a e ipsi e d sit æqualis, re- D ctangulum a e d quater sumptum æquale est quadrato a d: rectangulum uero b e a quater sumptum quadrato b a est minus: neque enim punctum e lineam a b bifariam secat. linea igitur a c non cadet intra. quare sectionem ipsam contingat necesse est.





FED. COMMANDINVS.

A ET ut quadratum f b ad quadratum c d, ita quadratum b a ad quadratum a d.] *Ob similitudinem triangulorum f a b, c a d. quippe cum ponamus a c f lineam rectam esse.*

B Sed ut b e ad e d, ita rectangulum b e a quater sumptum ad rectangulum a e d 1. sexti quater.] *Nam ut b e ad e d, ita rectangulum b e a ad rectangulum a e d; ut autem rectangulum b e a ad rectangulum a e d, ita rectangulum b e a quater sumptum ad rectangulum a e d itidem quater sumptum, ex decima quinta quinti elementorum. quare ex undecima eiusdem constat propositum.*

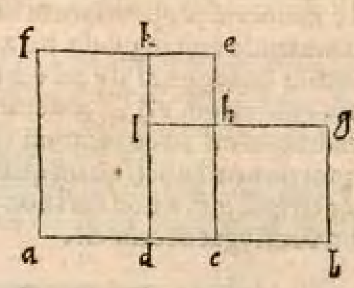
C Nam cum linea a e ipsi e d sit æqualis, rectangulum a e d quater sumptum æquale est quadrato e d.] *Quadratum enim a d ex quarta secundi elementorum æquale est quadratis a e, e d, & duobus rectangulis a e d. Sed quadrata a e, e d duobus rectangulis a e d æqualia sunt, quod lineæ a e, e d sint æquales. ergo rectangulum a e d quater sumptum quadrato a d æquale erit.*

D Rectangulum uero b e a quater sumptum quadrato b a est minus.] *Rursus enim eadem ratione quadratum b a æquale est quadratis b e, e a, & duobus rectangulis b e a. Sed cum lineæ b e, e a inæquales sint, duo rectangula b e a minora sunt quadratis b e, e a, ut mox demonstrabitur. rectangulum igitur b e a quater sumptum minus est quadrato b a. illud uero nos hoc lemmate demonstrabimus.*

Si recta linea in partes inæquales secetur, earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur; & quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

Secetur recta linea a b in partes inæquales in c, ita ut a c maior sit, quàm c b: & ipsi c b æqualis ponatur a d. Dico quadrata a c, c b æqualia esse rectangulo, quod bis a c b continetur; & quadrato lineæ d c; qua scilicet a c ipsam c b superat. constituantur enim ex lineis a c, c b quadrata

drata a c e f, c b g h: & per d ducta linea d κ, quæ ipsi c e æquidistet, producatur g h ad d k in l. Itaque quoniam a d, c b æquales sunt, & utrique communis d c; erit d b ipsi a c æqualis: ideoq; rectangula a k, d g erunt æqualia ei, quod bis a c b continetur. quadratum autem l h e κ æquale est quadrato lineæ d c. ergo quadrata a c, c b æqualia sunt rectangulo, quod bis continetur a c b; & lineæ d c quadrato: quod demonstrare oportebat.

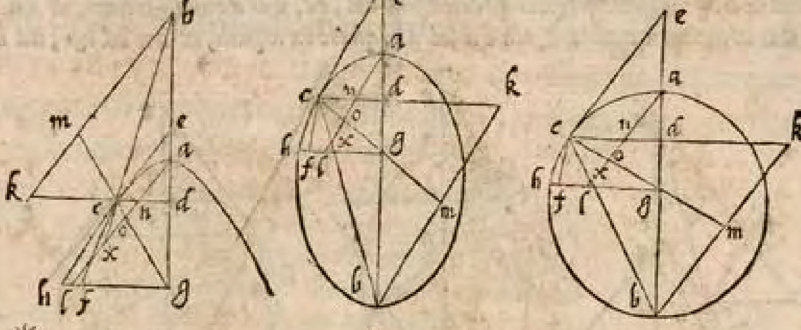


THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XXXIIII.

Si in hyperbola, uel ellipsi, uel circuli circumferentia sumatur aliquod punctum: ab eoq; recta linea ad diametrum ordinatim applicetur: & quam proportionem habent lineæ interiectæ inter applicatam, & terminos transuersi lateris figuræ, eandem habeant inter se partes lateris transuersi, ita ut quæ sunt ad uerticem partes sibi ipsis respondeant: recta linea coniungens punctum, quod in transuerso latere sumitur, & punctum, quod est in sectione, sectionem ipsam continget.

Sit hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b; sumaturq; aliquod punctum in sectione, quod sit c: & ab eo linea c d ordinatim applicetur: fiat autem ut b d ad d a, sic b e ad e a: & iungatur e c. Dico lineam c e sectionem contingere. Si enim fieri potest, secet, ut e c f: & sumpto in ea aliquo puncto f ordinatim applicetur g f h: per puncta uero a b ducantur a l, b k, quæ ipsi e c æquidistent: & iunctæ d c, b c, g c ad puncta m x k producantur. Itaque quoniam ut b d ad d a, ita est A

Tangens hyperbolæ uel Ellipsis, quæ sit, et quomodo ducatur à dato puncto in Sect.e uel in diametro producta, quod conuerso modo facile probari potest



b e ad e a, & ut b d ad d a, sic b k ad a n: ut autem b e ad e a, ita b c ad c x, hoc est b k ad x n: erit ut b k ad a n, ita b k ad n x. æqualis est igitur a n ipsi n x. & propterea rectangulum a n x maius est rectangulo a o x. quare linea n x ad x o maiorem habet proportionem, quàm o a ad a n. Sed ut n x ad x o, ita k b ad b m. ergo k b ad b m maiorem proportionem habet, quàm o a ad a n: ideoq; rectangulum, quod fit ex k b, a n maius est eo, quod ex b m, a o. Sequitur igitur rectangulum ex k b, a n ad quadratum c e maiorem proportionem habere quàm rectangulum ex m b, a o ad quadratum c e. at uero ut rectangulum ex k b, a n ad quadratum c e, sic rectangulum b d a ad quadratum d c, propter similitudiné triangulorum b k d, a n d, e c d. & ut rectangulum ex m b, a o

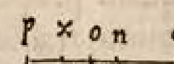
4. sexti.
2. sexti
9. quinti.
B
C

ad quadratum c e, sic rectangulum b g a ad quadratum g e. ergo b d a rectangulum
27.quinti apud Cã. ad quadratum d e maiorem proportionem habet, quàm rectangulum b g a ad quadratum g e. & permutando rectangulum b d a ad rectangulum a g b maiorem habet
21.huius proportionem, quàm quadratum d e ad e g quadratum. Sed ut rectangulum b d a
4.& 22. sexti. ad ipsum a g b, ita quadratum c d ad quadratum g h: & ut quadratum d e ad quadratum e g, sic quadratum c d ad quadratum f g. quadratum igitur c d ad quadratum g h maiorem proportionem habet, quàm quadratum c d ad quadratum f g: & idcirco linea h g minor est ipsa g f: quod fieri non potest. linea igitur e c non secat. quare sectionem ipsam contingat necesse est.

EVTOCIVS.

SCIENDVM *est lineam c d, quæ ad diametrum ordinatim applicatur, in hyperbola quidem determinare lineas b d, d a, & relinquere ipsam b a, quæ in proportionem linearum b d, d a secari debet; in ellipsi uero & circuli circumferentia contra euenit: nam cum secet lineam b a, necesse est ut inquiramus b e, e a in determinata proportione, in qua uidelicet sunt b d, d a. neque enim difficile est data proportione, æqualem ipsi exhibere. Sed & illud scire oportet, in unaquaque sectione duas descriptiones esse, nempe puncto f uel intra c, uel extra sumpto, ita ut omnes casus sex sint. utitur autem duobus lemmatibus, quæ nos deinceps conscribemus.*

B Et propterea rectangulum a n x maius est rectangulo a o x. quare linea n x ad x o maiorem proportionem habet, quàm o a ad a n.] *Quoniam enim rectangulum a n x rectangulo a o x maius est, fiat rectangulo a n x æquale rectangulum, quod ipsa a o, & alia quapiam linea, uidelicet x p contineatur,*

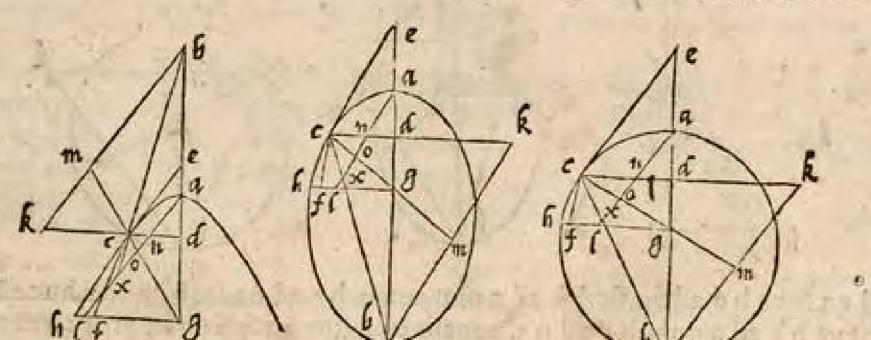


14.sexti. *quæ quidem maior erit, quàm x o. est igitur ut o a ad a n, sic n x ad*
8.quinti. *x p. sed n x ad x o maiorem proportionem habet, quàm ad x p. ergo o a ad a n minorem habet proportionem, quam n x ad x o: & ideo n x ad x o maiorem habet, quàm o a ad a n.*

Sed contra illud etiam constat, si n x ad x o maiorem proportionem habeat, quàm o a ad a n, & rectangulum a n x maius esse rectangulo a o x.

Fiat enim ut o a ad a n, ita n x ad aliam lineam maiorem ipsa x o, uidelicet ad x p. quare rectangulum a n x æquale est rectangulo, quod a o, x p continetur. rectangulum igitur a n x rectangulo a o x maius erit.

C At uero ut rectangulum ex k b, a n ad quadratum c e, sic rectangulum b d a ad
4.sexti quadratum d e.] *Quoniam igitur ob linearum a n, e c, k b æquidistantiam, ut a n ad e c, ita est a d ad d e: ut autem e c ad k b, ita e d ad d b. quare ex æquali, ut a n ad k b, ita a d ad d b:*



lemm.22 decimi. *& propterea ut quadratum a n ad rectangulum ex a n, k b, ita quadratum a d ad rectangulum*
4.& 22. sexti *a d b. Sed ut quadratum e c ad quadratum a n, ita quadratum e d ad quadratum d a. ergo ex æquali ut quadratum e c ad rectangulum ex k b, a n, ita quadratum e d ad rectangulum a d b: & conuertendo ut rectangulum ex k b, a n ad quadratum e c, ita rectangulum b d a ad quadratum d e.*

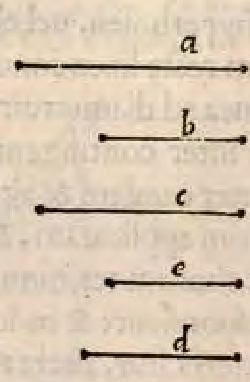
FED. COMMANDINVS.

Fiat autem, ut b d ad d a, sic b e ad e a.] *In hyperbola quomodo illud fiat perspicuum est: at uero in ellipsi, uel circulo, sumatur in d b linea, quæ sit æqualis d a: sitq; d g, ut in propositis figuris; & fiat ut b g ad g d, ita b a ad a e. erit enim componendo, ut b d ad d g, hoc est ad d a ei æqualem, ita b e ad e a: quod faciendum proponebatur.* A

Et propterea rectangulum a n x maius est rectangulo a o x. quare linea n x ad x o maiorem proportionem habet quàm o a ad a n.] *Illud Pappus ad principium septimi libri hoc lemmate demonstrauit.* B

Habeat a ad b maiorem proportionem, quàm c ad d. Dico rectangulum contentum lineis a d maius esse eo, quod b c continetur.

Fiat enim ut a ad b, ita c ad e. ergo c ad e maiorem proportionem habet, quàm ad d. & id circo e minor est, quàm d. Itaque posita a communi altitudine, erit rectangulum ex a e minus rectangulo ex a d. Sed rectangulum ex a e æquale est ei, quod ex b c. rectangulum igitur ex b c minus est rectangulo ex a d: & propterea rectangulum ex a d maius eo, quod ex b c.



Similiter etiam si minor sit proportio, rectangulum rectangulo minus erit.

Sed rursus sit rectangulum ex a d maius rectangulo ex b c. Dico a ad b maiorem habere proportionem, quàm c ad d.

Ponatur namque rectangulo ex a d æquale rectangulum quod ex b e. erit rectangulum ex b e maius eo, quod ex b c. quare & e maior, quàm c. Vt autem a ad b, ita e ad d. Sed e ad d maiorem habet proportionem, quàm c ad d. ergo & a ad b habebit maiorem, quàm c ad d. 14. sexti

At uero ut rectangulum ex k b, a n ad quadratum c e, sic rectangulum b d a ad quadratum d e.] *Ex tertio lemmate Pappi.* C

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XXXV.

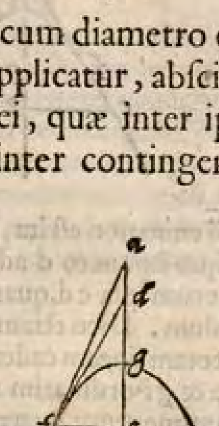
Hoc Theorema est conuersum 33 huius.

Si parabolen recta linea contingat, conueniens cum diametro extra sectionem; quæ à tactu ad diametrum ordinatim applicatur, abscindet ex diametro ad uerticem sectionis lineam æqualem ei, quæ inter ipsam & contingentem interiicitur: & in locum, qui est inter contingentem & sectionem alia recta linea non cadet.

Quomodo à dato puncto in diametro parabolę extra producta sectioni tangens ducatur, uel à dato puncto in eadem sectione, quod conuerso modo facilè demonstratur.

Sit parabole, cuius diameter a b: ordinatimq; applicetur b c: & sit a c linea sectionem contingens. Dico lineam a g ipsi g b æqualem esse. [Si enim fieri potest, sit inæqualis: & ipsi a g æqualis ponatur g e: linea autem e f ordinatim applicetur: & iungantur a f. ergo a f producta conueniet cum linea a c: quod fieri non potest; duarum enim rectarum linearum iidem termini essent. non ergo inæqualis est a g ipsi g b. quare necessario erit æqualis. Rursus dico in locum, qui est inter a c, & sectionem, aliam rectam lineam non cadere. Si enim fieri possit, cadat c d: ipsiq; g d æqualis ponatur g e: & e f ordinatim applicetur. ergo à puncto d ad f ducta linea contingit sectionem. quare producta extra ipsam cadet: & propterea conueniet cum d c, eruntq; duarum linearum rectarum iidem termini: quod est absurdum. non igitur in locum, qui est inter sectionem, & lineam a c alia recta linea cadet.

...ia cum ... tangens 33 huius ...dit extra ...ctionem



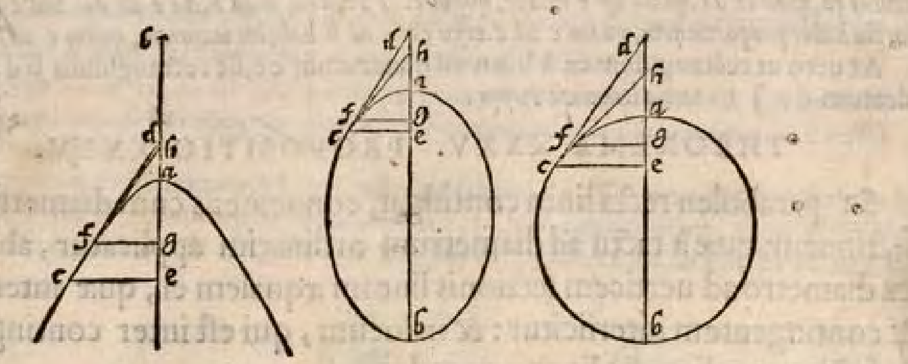
FED. COMMANDINVS.

Ergo af producta conueniet cùm linea a c: quod fieri non poteſt; duarum enim rectarum linearum iidem termini eſſent.] *Nam linea a f ex trigeſima tertia propoſitione huius ſectionem contingit. quare ſi producatur, cadet extra ſectionem; & id circo conueniet cum linea a c, ita ut ſint duarum linearum rectarum ijdem termini: quod eſt abſurdum; quoniam duæ rectæ lineæ ſuperficiem intra ſe ſe concluderent. alia eſt enim linea, quæ à puncto a ad f; alia quæ ab eodem puncto ad c ducitur: quarum linearum ijdem termini erunt; unus uidelicet ad a, alter ad punctum, in quo linea a f cum a c conuenit.*

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XXXVI.

Si hyperbolen, uel ellipſim, uel circuli circumferentiam contingat quædam recta linea conueniens cum tranſuerſo figuræ latere: & à tactu recta linea ad diametrum ordinatim applicetur: erit ut linea, quæ interiicitur inter contingentem, & terminum tranſuerſi lateris ad interiectam inter eandem & alterum lateris terminum, ita linea, quæ eſt inter ordinatim applicatam, & terminum lateris ad eam, quæ eſt inter eandem & alterum terminum; adeo ut continuatæ inter ſe ſint, quæ ſibi ipſis reſpondent: & in locum, qui inter contingentem, & ſectionem coni interiicitur, altera recta linea non cadet.

Sit hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b: linea uero contingens ſit c d. & c e ordinatim applicetur. Dico ut b e ad e a, ſic eſſe b d ad



d a. [Si enim non eſt ita, ſit ut b d ad d a, ſic b g ad g a: & ordinatim applicetur g f. ergo quæ à puncto d ad f ducitur recta linea ſectionem continget, & producta conueniet cum ipſa c d. quare duarum rectarum linearum iidem termini erunt: quod eſt abſurdum. Dico etiam in locum, qui inter ſectionem & lineam c d interiicitur, nullam rectam lineam cadere. Si enim fieri poteſt, cadat c h: & ut b h ad h a, ita fiat b g ad g a: & g f ordinatim applicetur. iuncta ergo h f, ſi producatur, conueniet cum ipſa h c; atque erunt duarum linearum rectarum iidem termini: quod fieri non poteſt. non ergo inter ſectionem & lineam c d altera recta linea cadet.

34. huius

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XXXVII.

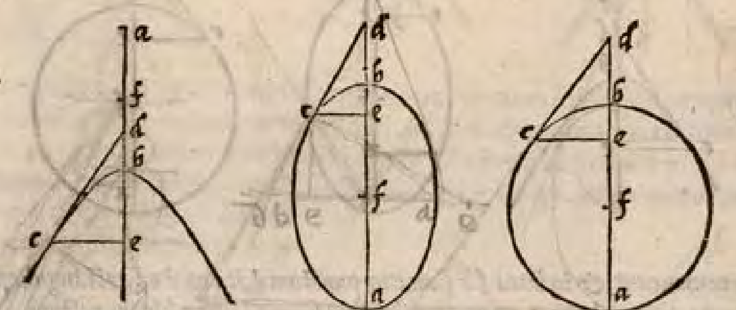
Si hyperbolen, uel ellipſim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conueniat: & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: quæ interiicitur inter applicatam & centrum ſectio

nis

nis unà cum interiecta inter contingentem, & sectionis centrum, continebit rectangulum æquale quadrato lineæ, quæ est ex centro sectionis: sed unà cum ea, quæ inter applicatam & contingentem interiicitur, continebit spatium, quod ad quadratum lineæ applicatæ eandem proportionem habet, quam transuersum figuræ latus ad rectum.

Quomodo agatur tangens hyperbolę à dato puncto in transuerso latere sumpto inter centrum et uerticem uel in Ellipsi à dato puncto in diametro producta. uel in utraq; sectione à dato puncto in eadem.

SIT hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b: ducaturq; linea contingens c d: & c e ordinatim applicetur: centrum autem sit f. Dico rectangulum d f e quadrato f b æquale esse: & ut rectangulum d e f ad quadratũ e c, ita transuersum latus ad rectum. quoniam enim c d contingit sectionem; & ordinatim applicata est c e: erit ut a d ad d b, ita a e ad e b. ergo componendo, ut utraque a d, d b ad d b, ita utraque a e, e b ad e b: & antecedentium dimidia. In hyperbola quidem in hunc modum argumentabimur. Sed utriusque a e, e b dimidia est f e; ip- 36.huius



sius autem a b dimidia f b. ut igitur f e ad e b, ita f b ad b d: & per conuersionem rationis, ut e f ad f b, ita f b ad f d. quare rectangulum e f d quadrato f b est æquale. & 17. sexti
quoniam ut f e ad e b, ita f b ad b d; hoc est a f ad b d: erit permutando ut a f ad f e, ita d b ad b e: & componendo, ut a e ad e f, ita d e ad e b. ergo rectangulum a e b 16.sexti.
æquale est rectangulo f e d. sed ut rectangulum a e b ad quadratum c e, ita transuersum latus ad rectum. Vt igitur rectangulum f e d ad quadratum e c, ita transuersum latus ad rectum. 21.huius.

In ellipsi uero, & circuli circumferentia hoc modo. sed utriusque a d d b dimidia est d f; & ipsius a b dimidia f b. ergo ut f d ad d b, ita f b ad b e: & per conuersionẽ rationis, ut d f ad f b, ita b f ad f e. rectangulum igitur d f e æquale est quadrato b f. 17. sexti
at uero rectangulum d f e rectangulo d e f unà cum quadrato f e est æquale: & quadratum b f æquale rectangulo a e b unà cum quadrato f e. commune auferatur, uidelicet quadratum f e. reliquum igitur rectangulum d e f ad quadratum c e est ut rectangulum a e b ad idem c e quadratum. sed ut rectãgulum a e b ad quadratum c e, ita transuersum latus ad rectum. ergo ut rectangulum d e f ad quadratum e c, ita transuersum latus ad rectum. 3.secũdi 6 7.quinti.

E V T O C I V S.

Ex his theorematibus patet, quomodo per datum punctum in diametro uel uertice sectionis contingentem lineam ducere possimus.

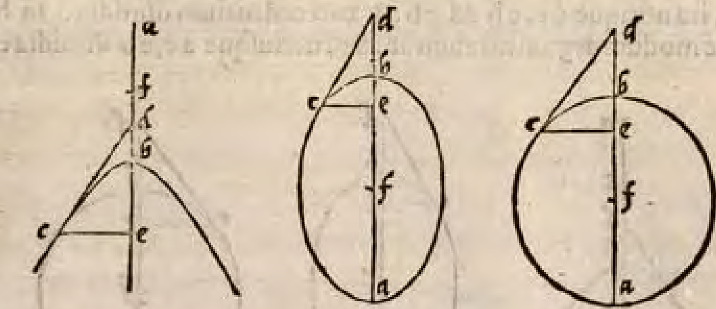
FED. COMMANDINVS.

Ex iis, quæ demonstrata sunt, constat lineam c d contingere sectionem, siue rectangulum d f e æquale sit quadrato f b: siue d e f rectangulum ad quadratum e c eam proportionem habeat, quam transuersum figuræ latus ad rectum.

Tangens hyperbolę, uel Ellipsis, uel circuli circumf. a puncto dato in sectione uel in diametro producta

Sit enim hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b : & sumatur aliquod punctum c in sectione; à quo recta linea c e ad diametrum ordinatim applicetur. sit autem
17. sexti *sectionis centrum f: fiatq; ut e f ad f b, ita b f ad f d: & iungatur c d. erit rectangulum d f e quadrato f b æquale. itaque dico lineam c d sectionem contingere. Quoniam enim in hyperbola est ut e f ad f b, ita b f ad f d: per conuersionem rationis erit ut f e ad e b, ita f b ad b d: & antecedentium dupla. sed lineæ a e, e b duplæ sunt ipsius f e: & lineæ a d, d b duplæ f b. quare ut a e, e b ad e b, ita a d, d b ad d b: & diuidendo ut a e ad e b, ita a d ad d b. ergo ex trigesima quarta huius linea c d sectionem contingit. In ellipsi uero & circuli circumferentia, ut d f ad f b, ita est b f ad f e. quare per conuersionem rationis, ut f d ad d b, ita f b ad b e, & antecedentium dupla. Sunt autem lineæ a d, d b ipsius f d duplæ, & a e, e b duplæ f b. Vt igitur a d, d b ad d b, ita a e, e b ad e b: &*
34. huius *diuidendo ut a d ad d b, ita a e ad e b. ex quibus sequitur, ut linea c d sectionem contingat.*

76



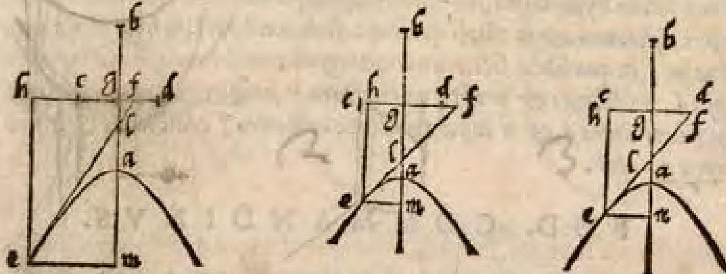
Rursus eadem maneant, & in linea f b sumatur punctum d, ita ut d e f rectangulum ad quadratum c e eam proportionem habeat, quam transuersum figuræ latus ad latus rectum. Dico lineam c d contingere sectionem. Quoniam enim rectangulum d e f ad quadratum c e est; ut transuersum la-
21. huius *tus ad rectum; & ut transuersum latus ad rectum, ita a e b rectangulum ad quadratum c e: erit re-*
9. quinti. *ctangulum d e f ad quadratum c e, ut rectangulum a e b ad idem quadratum: & propterea rectan-*
14. sexti. *gulum a e b rectangulo d e f est æquale. ergo in hyperbola, ut a e ad e f, ita d e ad e b: & diuidendo, permutandóq; ut a f, hoc est f b ad b d, ita f e ad e b: & per cõuersionem rationis, ut b f ad f d,*
16. sexti. *ita e f ad f b. rectangulum igitur d f e quadrato f b est æquale. & ideo ex ijs, quæ proxime demonstrauimus, linea c d sectionem continget. sed in ellipsi, & circuli circumferentia, quoniam rectangulum a e b æquale est rectangulo d e f, addito utrique quadrato f e; erit rectangulum a e b unà cum*
5. secũdi. *quadrato f e æquale rectangulo d e f unà cum quadrato f e. rectangulo autem a e b unà cum qua-*
3 *drato f e æquale est quadratum b f: & rectangulo d e f unà cum quadrato f e æquale rectangulum d f e. ergo rectangulum d f e æquale est quadrato f b: & propterea linea c d sectionem ipsam contingat necesse est: quæ omnia demonstrare oportebat. Ad hoc autem theorema quartum lemma Pappi spectare uidetur.*

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

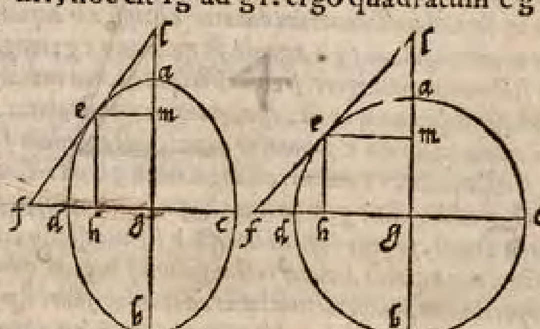
SI hyperbolen, uel ellipsim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum secunda diametro conueniat: & à tactu ad diametrum applicetur linea alteri diametro æquidistans: quæ interiicitur inter applicatam, & sectionis centrum unà cum interiecta inter contingentem, & centrum sectionis, continebit rectangulum æquale quadrato, quod fit ex dimidia secundæ diametri: sed unà cum ea, quæ inter applicatam, & contingentem interiicitur, spatium continebit, quod ad quadratum applicatæ eam proportionem habeat, quam figuræ rectum latus ad transuersum.

SIT hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a g b, secunda diameter c g d; linea uero sectionem contingens sit e l f, quæ conueniat cum c d in f: & h e

&c h e ipsi a b æquidistet. Dico rectangulum f g h quadrato c g æquale esse: & ut rectangulum g h f ad quadratum h e, ita rectũ figuræ latus ad latus transuersum. Ordinatim namque applicata m e, erit ut rectangulum g m l ad quadratum m e, ita transuersum 37. huius
latus ad rectum: sed ut transuersum latus b a ad c d, ita c d ad latus rectum: ergo ut diff. 2. dia
transuersum latus ad rectum, ita quadratum a b ad quadratum c d: & ita horum qua metri.
dratorum quartæ partes, uidelicet quadratum g a ad quadratum g c. ut igitur rectan cor. 20. se
gulum g m l ad quadratum m e, ita quadratum a g ad g c quadratum. sed rectangu- xti. 23. sexti



lum g m l ad quadratum m e compositam proportionem habet ex proportione g m ad m e, hoc est ad g h, & ex proportione l m ad m e. quare conuertendo proportio quadrati m e ad rectangulum g m l componitur ex proportione e m ad m g, hoc est h g ad g m, & ex proportione e m ad m l, hoc est f g ad g l. ergo quadratum c g ad 4. sexti
quadratum g a compositam habet proportionem ex proportione h g ad g m, & ex proportione f g ad g l. hæc autem eadem est, quæ rectanguli f g h ad rectangulum m g l. Vt igitur rectangulum f g h ad m g l rectangulum, ita quadratum c g ad quadratum g a: & permutando ut rectangulum f g h ad quadratum c g, ita rectangulum m g l ad quadratum g a. 23. sexti
rectangulum autem m g l æquale



est quadrato g a. ergo & rectangulum f g h quadrato c g æquale erit. Rursus ut 37. huius
rectum latus ad transuersum, ita quadratum e m ad rectangulum g m l. quadratum 37. huius
uero e m ad rectangulum g m l compositam proportionem habet ex proportione e m ad m g, hoc est g h ad h e; & ex proportione e m ad m l, hoc est f g ad g l; hoc est 4. sexti.
f h ad h e. quæ proportio eadem est, quam habet rectangulum f h g ad quadratum h e. ergo ut rectangulum f h g ad quadratum h e, ita rectum latus ad transuersum.

Iisdem positis ostendendum est, ut linea, quæ inter tangentem, & terminum secundæ diametri ad partes applicatæ interiicitur, ad eam, quæ inter tangẽtem, & alterum terminum secundæ diametri, ita esse lineam quæ est inter alterum terminum, & applicatam ad eam, quæ inter alterum terminum, & applicatam.

Quoniam enim æquale est rectangulum f g h quadrato g c, hoc est rectangulo c g d; nam linea c g æqualis est ipsi g d: erit f g h rectãgulum rectangulo c g d æquale. ergo 14. sexti.
ut f g ad g d, ita c g ad g h: & per conuersionem rationis, ut g f ad f d, ita g c ad c h: et diuidendo
& antecedentium dupla. est autem ipsius g f dupla utraque e f, f d, propterea quod c g est æqualis g d: & ipsius g c dupla d c. Vt igitur utraq; c f, f d ad f d, ita d c ad c h: & diuidendo ut c f ad f d, ita d h ad h c. quod demonstrare oportebat.

Ex iam dictis manifestum est lineam e f contingere sectionem, siue rectangulum f g h æquale sit quadrato g c, siue f h g rectangulum ad

Tangens hyperbolæ uel ellipsis, uel circuli, a dato puncto in diametro coniugata, uel etiam ut conuerse dicitur a dato puncto in eadem sectione, quadratum h e eam, quam diximus, proportionem habeat: conuerso enim modo illud facile ostendetur.

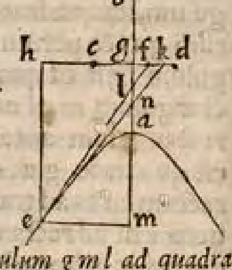
EVTOCIVS.

In aliquibus exemplaribus hoc theorema in sola hyperbola demonstratum inuenimus. Sed hoc loco uniuersaliter demonstratur, quoniam eadem contingunt & in alijs sectionibus. Apollonio autem uisum est non solum hyperbolen, sed etiam ellipsim secundam diametrum habere, ut sæpe ex ipso in superioribus didicimus. & in ellipsi quidem casum non habet, in hyperbola uero tres habet casus; punctum enim f, in quo linea sectionem contingens cum secunda diametro conuenit, uel est infra d, uel in ipso d, uel supra: & propterea punctum h similiter tres locos obtinet. attendendum autem est, cum f cadit infra d, & h infra c cadere: cum uero f cadit in d, & h in c: & cum f supra d, & h supra c cadet.

FED. COMMANDINVS.

Ex iam dictis manifestum est lineam e f contingere sectionem, siue rectangulum f g h æquale sit &c.

Sit enim hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a g b, secunda diameter c g d: & sumatur in sectione aliquod punctum e; à quo ad diametrum ordinatim applicetur e m: & ad secundam diametrum ducatur e h, ipsi a b æquidistans. Sumpto autem in linea g d puncto f, ita ut rectangulum f g h æquale sit quadrato c g; iungatur e f secans diametrum in l. Dico lineam e f sectionem contingere. si enim fieri potest, non contingat sectionem linea e l f, sed alia linea e n k. Eodem modo, quo usus est Apollonius, demonstrabitur rectangulum k g h quadrato c g æquale esse. sed eidem quadrato c g ponitur æquale rectangulum f g h. rectangulum igitur k g h rectangulo
1. sexti *f g h est æquale. Vt autem rectangulum k g h ad rectangulum f g h, ita linea k g ad lineam f g. ergo linea k g æqualis est ipsi f g: quod fieri nullo modo potest. sequitur igitur lineam e l f necessario sectionem contingere. Iisdem manentibus, habeat rectangulum f h g ad quadratum h e eandem proportionem, quam rectum latus ad transuersum. Rursus dico lineam e l f contingere sectionem. habebit enim quadratū h e ad rectangulum f h g proportionem eandem, quam transuersum latus ad rectum. sed proportio qua-*
4. sexti *drati h e ad rectangulum f h g composita est ex proportione e h ad h f, hoc est l m ad m e, & ex proportione e h ad h g, hoc est g m ad m e: quæ quidem est ea, quam habet rectangulum g m l ad quadratum m e. ergo rectangulum g m l ad quadratum m e est, ut transuersum latus ad rectum. quare ex his, quæ in antecedenti demonstrauimus, linea e l f sectionem continget.*

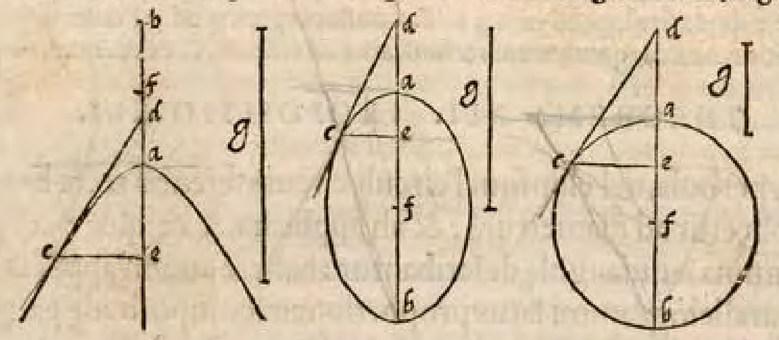


THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XXXIX.

Si hyperbolen, uel ellipsim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conueniat: & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: sumpta quauis linea ex duabus, quarum altera interiicitur inter applicatam, & centrum sectionis; altera inter applicatā, & contingentem: habebit ad eam applicata proportionem compositam ex proportione, quam habet altera dictarum linearum ad applicatam, & ex proportione, quam rectum figuræ latus habet ad transuersum.

Sit hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b; centrum autem f ducaturq; linea c d sectionem contingens: & c e ordinatim applicetur. Dico c e ad alteram linearum f e, e d proportionem habere compositam ex proportione, quam

quam habet rectum figuræ latus ad tranſuerſum, & ex ea quam altera dictarum linearum f e, e d habet ad ipſam e c. ſit enim rectangulum f e d æquale rectangulo, quod fit ex e c, & linea, in qua g. & quoniam ut rectangulum f e d ad quadratum c e, ita tranſ- 37.huius
uerſum latus ad rectum: atque eſt rectangulum f e d rectãgulo ex e c, & g æquale: erit

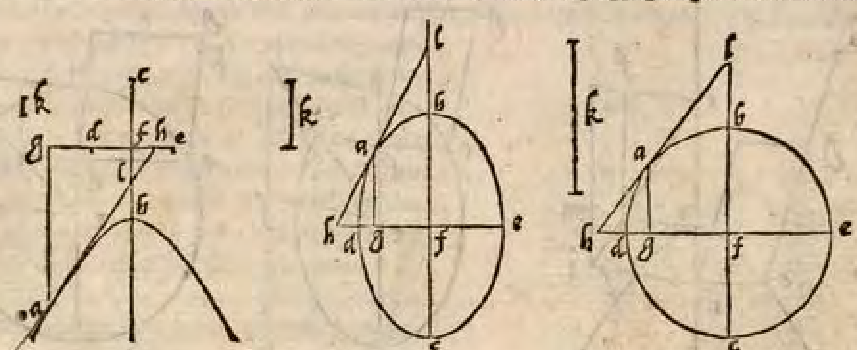


ut rectangulum ex e c, & g ad quadratum c e, hoc eſt, ut g ad c e, ita tranſuerſum latus ad rectum. Rurſus quoniam rectangulum f e d æquale eſt rectangulo ex e c & g: ut f e ad e c, ita erit g ad e d. habet autem c e ad e d proportionem cõpoſitam ex proportione; quam c e habet ad g, & ex ea, quam g ad e d: utq; c e ad g, ita eſt rectum latus ad tranſuerſum: & ut g ad e d, ita f e ad e c. ergo c e ad e d proportionem habebit compoſitam ex proportione, quam habet rectum latus ad tranſuerſum, & ex ea, quam f e habet ad e c. lem.in 22 decimi 14.ſexti

THEOREMA XL. PROPOSITIO XL.

Si hyperbolen, uel ellipſim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum ſecunda diametro conueniat: & à tactu ad eandem diametrum linea applicetur, diametro alteri æquidiſtans: ſumpta qualibet linea ex duabus, quarum una inter applicatam, & ſectionis centrum interiicitur, altera inter applicatam, & contingentem: habebit ad ipſam applicata proportionem compoſitam ex proportione, quam habet tranſuerſum figuræ latus ad rectum, & ex ea, quam altera dictarum linearum habet ad applicatam.

SIT hyperbole, uel ellipſis, uel circuli circumferentia a b, cuius diameter b f c, ſecunda diameter d f e: ducaturq; recta linea ſectionem contingens h l a; & ipſi b c æquidiſtans ducatur a g. Dico a g ad alteram linearum h g, g f proportionem habere



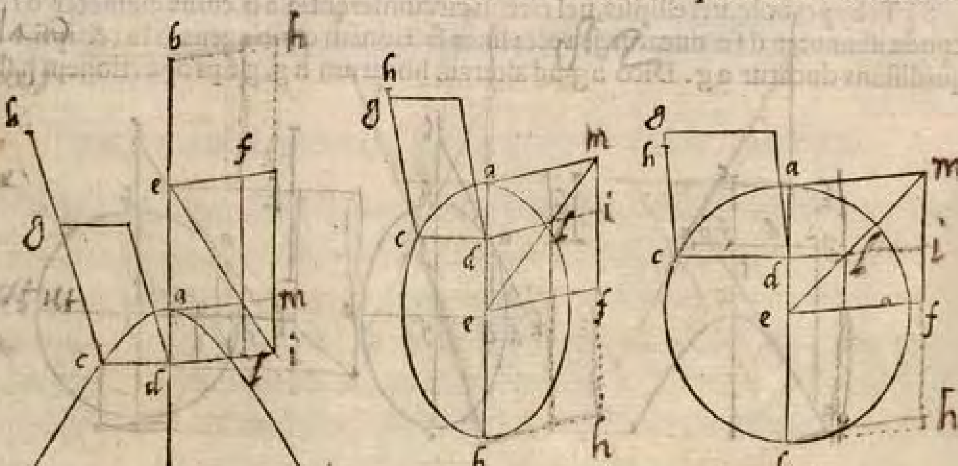
compoſitam ex proportione, quam habet tranſuerſum figuræ latus ad rectum, & ex ea quam altera dictarum linearum h g, g f habet ad ipſam g a. ſit enim rectangulum h g f rectangulo, quod fit ex g a, & linea k æquale. Itaque quoniam ut rectum latus ad tranſuerſum, ita rectangulum h g f ad quadratum g a: rectangulo autem h g f æquale 38.huius

est, quod fit ex g a & k: erit rectangulum ex g a & k ad quadratum g a, hoc est k ad a g, ut latus rectum ad transuersum. & quoniam a g ad g f compositam habet proportionem ex proportione, quam habet a g ad k, & ex ea, quã k ad g f: estq́, ut a g ad k,
14. sexti ita transuersum latus ad rectum: & ut k ad g f, ita h g ad g a, propterea quod rectangulum h g f æquale sit ei, quod ex a g & k. constat ergo a g ad g f compositam habere proportionem ex ea, quam transuersum latus ad rectum, & ex ea, quam h g habet ad g a.

THEOREMA XLI. IROPOSITIO XLI.

Si in hyperbola, uel ellipsi, uel circuli circumferentia recta linea ordinatim applicetur ad diametrum: & ab applicata, & ea, quæ ex centro parallelogramma æquiangula describantur: habeat autem applicata ad reliquum parallelogrammi latus proportionem compositam ex proportione, quam habet ea, quæ ex centro ad reliquum latus; & ex proportione, quam rectum figuræ sectionis latus habet ad transuersum: parallelogrammum factum à linea; quæ inter centrum, & applicatam interiicitur, simile parallelogrammo, quod fit ab ea, quæ ex centro, in hyperbola quidem maius est, quàm parallelogrammum ab applicata, parallelogrammo ab ea, quæ ex centro, in ellipsi uero, & circuli circũferentia unà cum parallelogrammo, quod fit ab applicata æquale est parallelogrammo ab ea quæ ex centro.

SIT hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b, centrũ e: & ordinatim applicetur c d: à lineis autem e a, c d æquiangula parallelogramma describantur, quæ sint a f, d g: & habeat d c ad c g proportionem compositam ex proportione, quam habet a e ad e f, & ex ea, quam rectum figuræ latus habet ad trãsuersum. Dico in hyperbola parallelogrammum, quod fit ex e d simile ipsi a f, parallelogrammis a f, g d æquale esse; in ellipsi uero, & circuli circumferentia parallelogrammum, quod fit ex e d simile a f, unà cum parallelogrammo g d ipsi a f esse æquale. fiat enim ut rectum figuræ latus ad transuersum, ita d c ad c h. & quoniam ut d c ad c h,
lem. in 22 decimi ita rectum latus ad transuersum: ut autem d c ad c h. ita quadratum d c ad re-
21. huius ctangulum d c h: & ut rectum latus ad transuersum, ita quadratum d c ad re-

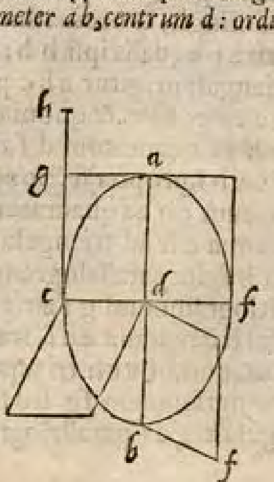


9. quinti ctangulum b d a: erit rectangulum b d a rectangulo d c h æquale. rursus quoniam d c ad c g proportionem habet compositam ex proportione, quam habet a e ad e f: & ex ea, quam rectum latus ad transuersum, hoc est quam d c habet

ad c h. sed d c ad c g compositam proportionem habet ex proportione d c ad c h, & ex proportione h c ad c g: erit proportio composita ex proportione a e ad e f, & ex proportione d c ad c h eadem, quæ componitur ex proportione d c ad c h; & ex proportione h c ad c g. communis auferatur, proportio scilicet d c ad c h. reliqua igitur proportio a e ad e f eadem est, quæ reliqua h c ad c g. ut autem h c ad c g, ita 1. sexti
rectangulum h c d ad rectangulum g c d: & ut a e ad e f, ita quadratum a e ad rectan lem. in 22. decimi
gulum a e f. ergo ut rectangulum h c d ad rectangulum g c d, ita quadratum a e ad re 11. quinti
ctangulum a e f. sed ostensum est rectangulum h c d æquale esse rectangulo b d a. ut igitur rectangulum b d a ad rectangulum g c d, ita quadratum a e ad rectangulum a e f: permutandoq; ut rectangulum b d a ad quadratum a e, ita rectangulum g c d ad ipsum a e f: & ut rectangulum g c d ad a e f rectangulum, ita parallelogrammum A
d g ad parallelogrammum f a: parallelogramma enim æquiangula sunt, & proportio- 22. sexti
nem habent compositam ex proportione laterum g c ad a e, & c d ad e f. quare ut re ctangulum b d a ad quadratum a e, ita parallelogrammum d g ad ipsum f a. Itaque in hyperbola hoc modo concludemus. Vt omnia se habent ad omnia, ita unum ad B
unum. ergo ut rectangulum b d a unà cum quadrato a e ad a e quadratum, hoc est 6. secūdi
quadratum d e ad quadratum e a, sic parallelogramma g d, a f ad parallelogrammū a f. Sed ut quadratum d e ad quadratum e a, sic parallelogrammum, quod fit ex d e, si C
mile, & similiter descriptum ipsi a f ad parallelogrammum a f. ut igitur parallelogrā ma d g, a f ad parallelogrammum a f, sic parallelogrammum ex d e descriptum simile ipsi a f ad a f. ergo parallelogrammum ex d e, simile ipsi a f æquale est parallelogrā 9. quinti
mis g d, a f. In ellipsi uero & circuli circumferentia hoc modo. Quoniam ut totum, D
quadratum scilicet a e ad totum parallelogrammum a f, sic ablatum rectangulū a d b ad ablatum parallelogrammum d g; erit reliquum ad reliquum, sicut totum ad totū. 19. quinti
Quòd si à quadrato e a auferatur rectangulum b d a, relinquetur quadratum d e. Vt 5. secūdi.
igitur quadratum d e ad excessum, quo parallelogrammum a f excedit parallelogrā mum d g, sic quadratum a e ad parallelogrammum a f. sed ut quadratum a e ad pa- E
rallelogrammum a f, sic quadratum d e ad parallelogrammum, quod fit ex d e, simile ipsi a f. ergo ut quadratum d e ad excessum, quo parallelogrammum a f excedit ipsum d g, sic quadratum d e ad parallelogrammum ex d e, simile ipsi a f. parallelogrā mum igitur ex d e simile a f æquale est excessui, quo parallelogrammum a f excedit 9. quinti.
d g. quare sequitur parallelogrammum ex d e simile a f unà cum parallelogrammo d g ipsi a f æquale esse.

EVTOCIVS.

THEOREMA *hoc in hyperbola casum non habet; in ellipsi uero, si applicata in centrum cadat, & reliqua eodem modo disponantur, parallelogrammum, quod fit ab applicata parallelogrammo, quod ab ea, quæ ex centro æquale erit. sit enim ellipsis, cuius diameter a b, centrum d: ordinatimq; applicetur c d: & ab ipsis c d, d a parallelogramma æquiangula describantur, d g, a f: habeat autem d c ad c g proportionem compositam ex proportione, quam habet a d ad d f; & ex ea, quam rectum figuræ latus habet ad transuersum. Dico parallelogrammum a f æquale esse parallelogrammo d g. Quoniam enim in superioribus ostensum est, ut quadratum a d ad parallelogrammum a f, ita esse rectangulum a d b ad parallelogrammum d g: erit permutando, ut quadratum a d ad rectangulum a d b, ita parallelogrammum a f ad parallelogrammum d g. sed quadratum a d æquale est rectangulo a d b. ergo parallelogrammum a f parallelogrammo d g æquale erit.*



FED. COMMANDINVS.

A ET ut rectangulum g c d ad a e f rectangulum, ita parallelogrammum d g ad parallelogrammum f a.] *Hoc etiam constat ex sexto lemmate Pappi.*

B Vt omnia se habent ad omnia, ita unum ad unum] *In omnibus antiquis codicibus, quos uiderim sic legitur* ὡς πάντα πρὸς πάντα, ἓν πρὸς ἕν. *Sed delenda sunt, ut arbitror, tanquam ab aliquo addita; illud enim per compositam rationem colligi perspicuum est.*

C Sed ut quadratum d e ad quadratum e a; sic parallelogrammum, quod fit ex d e simile, & similiter descriptum ipsi a f ad parallelogrammum a f.] *Quadratum enim d e ad quadratum e a duplam proportionem habet eius, quæ est lateris d e ad latus e a: & eandem proportionem habet parallelogrammum ex d e simile ipsi a f ad a f. ex corollario 20. sexti elementorum.*

D Quoniam ut totum quadratum scilicet a e ad totum parallelogrammum a f.] *Demonstratum enim est superius, ut rectangulum b d a ad quadratum a e, ita esse parallelogrammum d g ad parallelogrammum f a. quare permutando rectangulum b d a ad parallelogrammum d g est, ut quadratum a e ad parallelogrammum a f.*

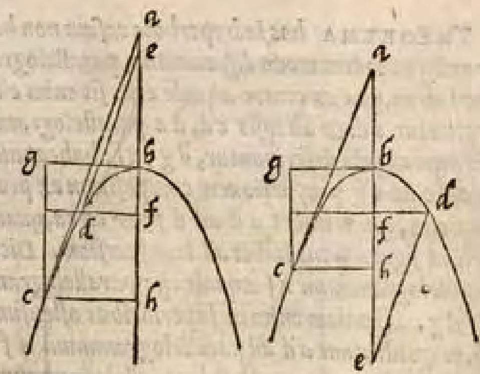
E Sed ut quadratum a e ad parallelogrammum a f, sic quadratum d e ad parallelogrammum, quod fit ex d e simile ipsi a f.] *Erat enim ut quadratum d e ad quadratum e a, sic parallelogrammum ex d e simile ipsi a f ad a f. ergo & permutando.*

THEOREMA XLII. PROPOSITIO XLII.

SI parabolen recta linea contingens cum diametro conueniat: & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: sumpto autem quouis puncto in sectione, applicentur ad diametrum duæ lineæ, altera quidem contingenti æquidistans, altera uero æquidistans ei, quæ à tactu ordinatim applicata est: triangulum, quod ab ipsis constituitur, æquale erit parallelogrammo contento linea à tactu applicata, & ea, quæ interiicitur inter æquidistantem & uerticem sectionis.

SIT parabole, cuius diameter a b: ducaturq; linea a c sectionem contingens: & c h ordinatim applicetur. à quouis autem puncto d applicetur d f: & per d quidem ducatur d e ipsi a c æquidistans, per c uero ipsa c g æquidistans b f: denique per b ducatur b g, quæ ipsi h c æquidistet. Dico triangulum e d f æquale esse parallelogrammo f g. Quoniam enim a c sectionem contingit, & ordinatim applicata est

84



A c h, erit a b æqualis ipsi b h; & a h dupla

35.huius. h b. triangulum igitur a h c parallelogrãmo b c est æquale. & quoniam ut quadra

20 tum c h ad quadratum d f, ita linea h b

B ad ipsam b f, propter sectionem: ut autem quadratum c h ad quadratum d f, ita tri-

1.sexti angulum a c h ad triangulum e d f: & ut h b ad b f, ita parallelogrammum g h ad parallelogrammum g f: erit ut triangulũ a c h ad triangulum e d f, ita h g parallelogrammum ad parallelogrammum f g: & permutando, ut a c h triangulum ad parallelogrammum h g, ita triangulum e d f ad parallelogrammum f g. sed triangulum a c h æquale est parallelogrammo h g. ergo triangulum e d f parallelogrammo f g æquale erit.

EVTOCIVS.

Hoc theorema undecim habet casus; unum quidem si d supra c sumatur; constat enim lineas æquidistantes cadere intra ipsas a c h: alios autem quinque casus habet, si d sumatur infra c: nam linea d f æquidistans cadet extra c h, & d e uel inter a & b cadet, uel in ipso b, uel inter b & h, uel in h, uel infra h: ut enim supra a cadat, fieri non potest: quoniam cum d sit infra c, & quæ per ipsum æquidistans a c ducitur, infra a cadet. Quod si d sumatur ex altera parte sectionis, uel utræque æquidistantes inter b & h cadent: uel d f quidem cadet supra h c, punctum uero e uel in h, uel infra, uel rursus e cadet infra h, & f, uel in h, ita ut c h d sit recta linea, (quamquam tunc non exacte æquidistantium proprietas seruetur) uel infra h cadet. Oportet autem in demonstratione quinque casuum postremorum lineam d f usque ad sectionem, & ad ipsam g c produci. Sed ex his aliam quandam descriptionem mente concipere possumus, cum uidelicet sumatur aliud punctum, & quæ in principio sumptæ fuerant lineæ faciant id, quod dictum est. Sed hoc theorema est, non casus.

FED. COMMANDINVS.

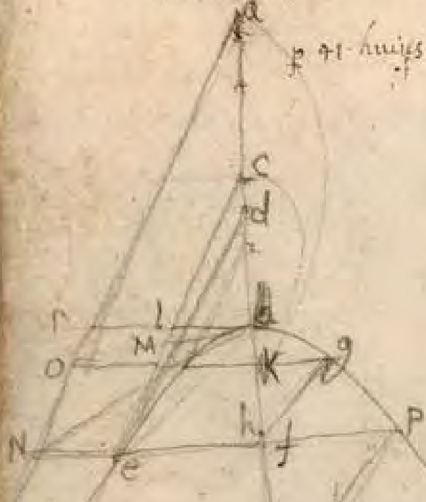
TRIANGVLVM igitur a h c parallelogrammo b c est æquale.] *Est enim parallelogrammum c h a duplum trianguli a h c, itemq; duplum parallelogrammi c h b, hoc est ipsius b c. quare ex nona quinti sequitur triangulum a c h parallelogrammo b c æquale esse.* A 41.primi. 1.sexti

Vt autem quadratum c h ad quadratum d f, ita triangulum a c h ad triangulum e d f.] *Quadratum enim c h ad quadratum d f duplam proportionem habet eius, quæ est lateris c h ad d f ex cor. 20. sexti: & similiter eandem habet proportionem triangulum a c h ad triangulum e d f ipsi simile. ut igitur quadratum c h ad quadratum d f, ita triangulum a c h ad triangulum e d f.* B

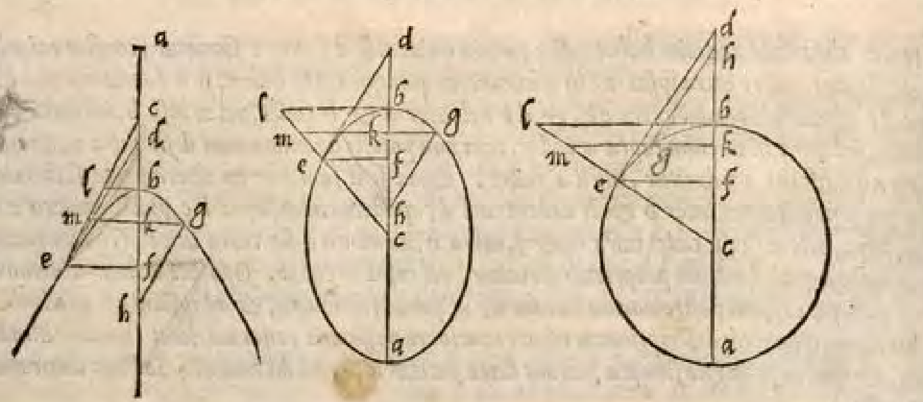
THEOREMA XLIII. PROPOSITIO XLIII.

SI hyperbolen, uel ellipsim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens conueniat cum diametro: & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: huic uero æquidistans ducatur per uerticem sectionis, quæ cum linea per tactum & centrum ducta conueniat: & sumpto aliquo puncto in sectione, ab eo ad diametrum duæ lineæ ducantur, una quidem contingenti æquidistans; altera uero æquidistans ei, quæ à tactu applicata est: triangulum ab ipsis factum in hyperbola minus erit, quàm triangulum, quod abscindit linea per centrum, & tactum ducta, triangulo ab ea, quæ ex centro, simili abscisso: in ellipsi uero, & circuli circumferentia unà cum triangulo abscisso ad centrum æquale erit triangulo simili abscisso, quod ab ea quæ ex centro describitur.

Sit hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b; centrum c: ducaturq; linea d e sectionem contingens: & iuncta c e, ordinatim applicetur e f. Sumatur autem aliquod punctum in sectione, quod sit g: & ducatur linea g h contingenti æquidistans: & g k m ordinatim applicetur: per b uero ordinatim applicetur b l. Dico triangulum k m c differre à triangulo c l b per triangulum g k h. Quoniam enim linea e d sectionem contingit, ordinatim uero applicata est e f, habebit c f ad f d proportionem compositam ex proportione c f ad f e, & ex proportione recti lateris ad transuersum. Sed ut c f ad f d, ita g k ad k h: & ut c f ad f e, ita c b ad b l. Ergo g k ad k h proportionem habebit compositam ex proportione c b ad b l: & ex 39.huius 4.sexti.



proportione recti lateris ad transuersum, quare ex his, quæ in quadragesimo primo



theoremate ostendimus, triangulum c k m à triangulo b c l differt, triangulo g h k:
15. quinti etenim in parallelogrammis triangulorum duplis hæc eadem demonstrata sunt.

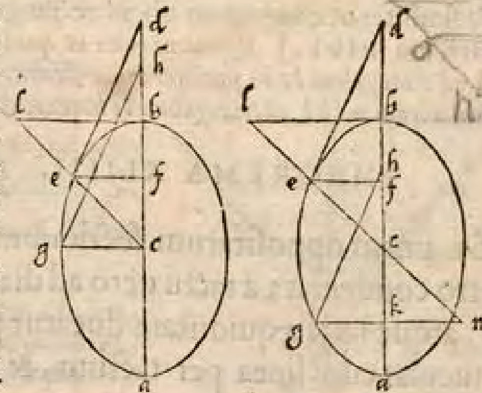
EVTOCIVS.

37. huius 14. sexti cor. 20. sexti 1. sexti 9. quinti. *In aliquibus codicibus huius theorematis talis legitur demonstratio.* Quoniam enim rectangulum f c d æquale est quadrato c b, erit ut f c ad c b, ita b c ad c d. quare ut figura, quæ fit ex f c ad figuram ex c b, ita linea f c ad c d. Sed ut figura ex f c ad figuram ex c b, ita e c f triangulum ad triangulum l c b: & ut linea f c ad ipsam c d, ita e f c triangulum ad triangulum e c d. Vt igitur e c f triangulum ad triangulum l c b, ita triangulum e c f ad ipsum e c d. proptereaq; triangulum e c d triangulo l c b est æqua-
A le. ergo in hyperbola per conuersionem rationis; & in ellipsi, conuertendo, diuiden-
B doq;, & rursus conuertendo, ut e f c triangulum ad quadrilaterum e l b f, ita triangu-
9. quinti. lum e c f ad triangulum e d f. quare triangulum e d f æquale est quadrilatero e l b f.
C Et quoniam ut quadratum f c ad c b quadratum, ita triangulum e c f ad triangulum
D l c b, in hyperbola quidem diuidendo; in ellipsi autem conuertendo, & per conuersio-
E nem rationis, & rursus conuertendo, erit ut rectangulum a f b ad quadratum b c, ita
F quadrilaterum e l b f ad triangulum b l c: & similiter ut quadratum c b ad rectangulum a k b, ita triangulum l c b ad quadrilaterum m l b k. ergo ex æquali ut rectangulum a f b ad rectangulum a k b, ita e l b f quadrilaterum ad quadrilaterum m l b k. ut
21. huius autem rectangulum a f b ad rectangulum a k b, ita quadratum e f ad quadratum g k: & ut quadratum e f ad quadratum g k, ita triangulum e d f ad triangulum g h k. quare ut triangulum e d f ad triangulum g h k, ita quadrilaterum e l b f ad quadrilaterum m l b k: & permutando ut triangulum e d f ad quadrilaterum e l b f, ita triangulum g h k ad quadrilaterum m l b k. Sed triangulum e d f ostensum est æquale quadrilatero e l b f. ergo & triangulum g h k quadrilatero m l b k est æquale. triangulum igitur m c k à triangulo l c b differt triangulo g h k.

Sed cum hæc demonstratio obscuritatem quandam habeat in proportionibus ellipsis, enitendum
E *est, ut ea, quæ breuiter dicta sunt, latius explicentur.* Quoniam, inquit, ut quadratum f c ad quadratum c b, ita triangulum e c f ad triangulum l c b, erit conuertendo, & per conuersionem rationis, rursusq; conuertendo. *est enim conuertendo ut quadratum b c ad quadratum c f, ita l c b triangulum ad triangulum e f c: & per conuersionem rationis, ut quadra-*
5. secundi *tum b c ad rectangulum a f b (hoc est ad excessum, quo quadratum b c excedit quadratum c f, quoniam punctum c lineam a b bifariam secat,) ita triangulum l b c ad quadrilaterum l b f e: & conuertendo, ut rectangulum a f b ad quadratum b c, ita quadrilaterum l b f e ad l c b triangulum. Habet autem in hyperbola casus undecim, quot habebat præcedens theorema in parabola, & præterea alium quendam, cum scilicet punctum, quod in g sumitur idem sit, quod c. tunc enim contingit triangulum e d f una cum triangulo l b c æquale esse triangulo c e f: quoniam ostensum est triangulum e d f quadrilatero l b f e æquale. quadrilaterum autem l b f e à triangulo c e f ipso l b c*

trian-

triangulo differt. Sed in ellipsi uel punctum g idem est, quod e, uel supra e sumitur, & tunc utrasque æquidistantes inter d & f cadere perspicuum est. quòd si g sumatur infra e, & ab eo ducta linea æquidistans ipsi e f cadat inter f & c, punctum h quinque casus efficit: uel enim cadit inter d & b, uel in b, uel inter b & f, uel in f, uel inter f & c. si uero quæ per g ducitur applicatæ æquidistans in centrum c cadat, punctum h similiter quinque efficit casus. Attendendum tamen est triangulum factum à lineis, quæ ipsis d e, e f æquidistant, triangulo l b c æquale esse.



Quoniam enim ut quadratum e f ad quadratum g c, ita triangulum e d f ad triangulum g h c, similia enim triangula sunt: & ut quadratum e f ad quadratum g c, ita rectangulum b f a ad rectangulum b c a, hoc est ad quadratum b c; erit ut triangulum e d f ad ipsum g h c, ita rectangulum b f a ad quadratum b c. ut autem rectangulum b f a ad quadratum b c, ita quadrilaterum l b f e ad triangulum l b c, quod demonstratum iam fuit: ergo ut e d f triangulum ad triangulum g h c, ita est quadrilaterum l b f e ad triangulum l b c: & permutando ut triangulum e d f ad quadrilaterum l b f e, ita triangulum g h c ad triangulum l b c. sed æquale est triangulum e d f quadrilatero l b f e. triangulum igitur g h c triangulo l b c est æquale. Possumus autem hæc etiam aliter probare, si dicamus in parallelogrammis triangulorum duplis eadem demonstrata esse; uidelicet in quadragesimo primo theoremate. Quòd si ducta per g æquidistans e f cadat inter c & a, producetur quidem, quousque linea c e cum ipsa conueniat; & punctum h septem casus efficiet. uel enim inter b & d cadit, uel in b, uel inter b & f, uel in f, uel inter f & c, uel in c, uel inter c & a, & in his casibus contingit differentiam triangulorum l b c, g h k infra constitui à lineis g k, e c productis. Si uero g sumatur in altera parte sectionis: & quæ per g ducitur ipsi e f æquidistans inter b & f cadat, producetur ob demonstrationem, quousque secet ipsam l c: & punctum h faciet septem casus; uel inter b & f cadens, uel in f, uel inter f & c, uel in c, uel inter c & a, uel in a, uel infra a. & si g k cadat inter f & c, punctum h quinque casus efficiet, uel enim erit inter f & c, uel in c, uel inter c & a, uel in a, uel infra a. Sed si g k in centrum c cadat, punctum h casus efficiet tres, uel inter c & a cadens, uel in a uel extra a. atque in his casibus rursus contingit triangulum g h k æquale esse triangulo l b c. Denique si g k cadat inter c & a, punctum h uel cadet inter c & a, uel in a, uel extra. Itaque in ellipsi casus omnes erunt quadraginta duo, & totidem in circuli circumferentia, ita ut huius theorematis casus sint nonaginta sex. 21. huius

FED. COMMANDINVS IN DEMONSTRATIONEM, QVAE AB EVTOCIO AFFERTVR.

Ergo in hyperbola per conuersionem rationis.] *Quoniam enim est ut e c f triangulum ad triangulum l c b, ita triangulum e c f ad triangulum e c d: erit per conuersionem rationis, ut e c f triangulum ad quadrilaterum e l b f, ita triangulum e c f ad triangulum e d f.* A

Et in ellipsi conuertendo, diuidendoque, & rursus conuertendo.] *Rursus quoniam ut triangulum e c f ad triangulum l c b, ita triangulum e c f ad triangulum e c d: conuertendo erit ut l c b triangulum ad triangulum e c f, ita triangulum e c d ad triangulum e c f: diuidendoque, ut quadrilaterum e l b f ad triangulum e c f, ita triangulum e d f ad triangulum e c f: & rursus conuertendo ut triangulum e c f ad quadrilaterum e l b f, ita triangulum e c f ad e d f triangulum.* B

Et quoniam ut quadratum f c ad c b quadratum, ita triangulum e c f ad triangulum l c b.] *Sunt enim triangula e c f, l b c similia, & duplam inter se proportionem habent eius, quæ est lateris ad latus similis rationis, quemadmodum & ipsa quadrata.* C cor. 20. sexti

In hyperbola quidem diuidendo.] *Nam cum sit ut quadratum f c, ad c b quadratum, ita triangulum e c f ad triangulum l c b; erit diuidendo, ut excessus, quo quadratum f c excedit c b quadratum, hoc est rectangulum a f b ex sexta secundi elementorum, ad quadratum c b, ita quadrilaterum e l b f ad triangulum l c b.* D

F Et similiter ut quadratum c b ad rectangulum a k b, ita triangulum l c b ad quadrilaterum m l b k.] *Quoniam enim ut quadratum* κ *c ad c b quadratum, ita triangulum m c k ad triangulum l c b: similiter demonstrabitur ut rectangulum a k b ad b c quadratum, ita quadrilaterum m l b k ad triangulum l c b. quare & conuertendo.*

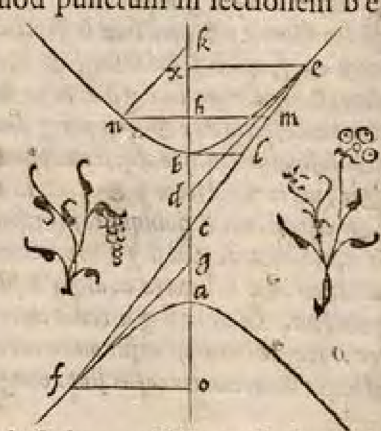
THEOREMA XLIIII. PROPOSITIO XLIIII.

Si unam oppositarum sectionum recta linea contingens cum diametro conueniat; à tactu uero ad diametrum linea ordinatim applicetur; atque huic æquidistans ducatur per uerticem alterius sectionis, ut conueniat cum linea per tactum, & centrum ducta: sumpto autem in sectione quouis puncto, applicentur ad diametrum duæ lineæ, quarum altera contingenti æquidistet, altera æquidistet ei, quæ à tactu ordinatim applicata est: triangulum ab ipsis factum minus est, quàm triangulum, quod abscindit applicata ad centrum sectionis, triangulo simili abscisso ab ea, quæ ex centro.

Sint oppositæ sectiones a f, b e, quarum diameter a b, centrum c: & ab aliquo puncto eorum, quæ sunt in sectione f a, uidelicet à puncto f ducatur linea f g sectionem contingens: ordinatimq; applicetur f o: & iuncta f c producatur, ut ad e: per b uero ducatur b l ipsi f o æquidistans: & sumatur aliquod punctum in sectionem b e, quod sit n; à quo n h ordinatim applicetur: atque ipsi f g æquidistans ducatur n k. Dico triangulum n h k minus esse, quàm triangulum c m h, triangulo c b l. Ducatur enim per e linea e d contingens e b sectionem: & e x ordinatim applicetur. itaque quoniam oppositæ sectiones sunt f a, b e, quarum diameter a b: & linea f c e per centrum ducitur: & f g, e d sectiones contingunt: erit d e ipsi f g æquidistans. est autem n k æquidistans f g. ergo & n k ipsi e d; & m h ipsi b l æquidistat. Quoniam igitur hyperbole est b e, cuius diameter a b, centrum c: & linea e d sectionem contingit: ordinatimq; applicata est e x: & ipsi e x æquidistat b l: sumpto autem in sectione puncto n, ab eo ordinatim applicatur n h, & ipsi d e æquidistans ducitur n k: erit triangulum n h k minus, quàm triangulum h m c, ipso c b l triangulo. hoc enim in quadragesimo tertio theoremate ostensum est.

usque ad alteram sectionem b e,

87 A



p 43 huius

EVTOCIVS.

A Itaque quoniam oppositæ sectiones sunt f a, b e; quarum diameter a b: & linea f c e per centrum ducitur: & f g, d e sectiones contingunt: erit d e ipsi f g æquidistans.] *Quoniam igitur hyperbole est a f, lineaq; f g sectionem contingit; & applicata est f o; erit rectangulum o c g æquale quadrato c a, ex trigesimo septimo theoremate: & similiter rectangulum x c d quadrato c b æquale. est igitur ut rectangulum o c g ad quadratum a c, ita rectangulum x c d ad quadratum b c: & permutando ut rectangulum o c g ad rectangulum x c d, ita quadratum a c ad ipsum c b: & id circo rectangulum o c g æquale est rectangulo x c d. estq; linea o c æqualis ipsi c x. ergo & g c ipsi c d. Sed f c ipsi c e est æqualis, ex trigesimo theoremate. lineæ igitur f c, c g, æquales sunt ipsis e c, c d: angulosq; æquales continent ad c, sunt enim secundum uerticem. quare & f g ipsi e d est æqualis; & angulus c g f angulo c d e: qui quidem anguli alterni sunt. ergo f g ipsi e d æquidistabit. Casus huius theorematis duodecim sunt, quemadmodum in hyperbola, ut diximus in quadragesimo tertio theoremate, atque eadem est demonstratio.*

ex demõstratis in 30. huius
15 primi
4
27

FED.

FED. COMMANDINVS.

Ex his quæ superius dicta sunt, licet etiam illud demonstrare.

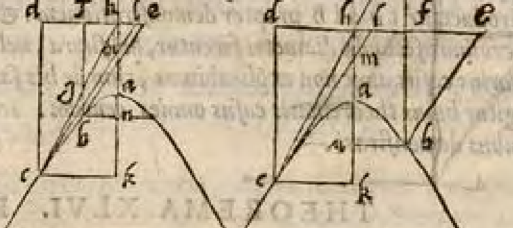
Si unam oppositarum sectionum recta linea contingat: & à tactu ducatur diameter usque ad alteram sectionem: quæ ab eo puncto ducitur lineæ sectionem contingenti æquidistans, sectionem ipsam continget.

Sint oppositæ sectiones a f, b e, quarum diameter a b, centrum c, ut in proposita figura: & linea f g in f sectionem contingat: ducatur autem diameter f c e sectioni b e in puncto e occurrens: & ab eo ducatur e d æquidistans f g. Dico lineam e d sectionem in e contingere. Nam si non contingit e d, ducatur ab eodem puncto alia linea sectionem contingens, quæ sit e p. æquidistabit e p lineæ f g, ex iam demonstratis. ergo & ipsi e d: quod fieri non potest: conueniunt enim inter se in puncto e. linea igitur e d in e sectionem contingat necesse est. 30. primi

THEOREMA XLV. PROPOSITIO XLV.

Si hyperbolen, uel ellipsim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum secunda diametro conueniat: & à tactu ad eandem diametrum linea applicetur, diametro alteri æquidistans: & per tactum & centrum ducta linea producatur: sumpto autem in sectione quouis puncto, ad secundam diametrum ducantur duæ lineæ, quarum una contingenti, altera applicatæ æquidistet: triangulum, quod ab ipsis constituitur, in hyperbola quidem maius est, quàm triangulum abscissum ab applicata ad centrum, triangulo, cuius basis est linea contingens, & uertex centrum sectionis: in ellipsi uero & circuli circumferentia, unà cum triangulo abscisso, æquale est triangulo, cuius basis linea contingens, & uertex sectionis centrum.

Sit hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia a b c, cuius diameter a h; secunda diameter h d; & centrum h: linea uero c m l sectionem contingat in c: ducaturq; c d ipsi a h æquidistans: & iuncta c h producatur: sumpto deinde in sectione quouis puncto b, ducantur lineæ b e, b f, quæ ipsis l c, c d æquidistent. Dico triangulum b e f in hyperbola quidem maius esse, quàm triangulum g h f, triangulo l c h; in ellipsi uero & circuli circumferentia, unà cum triangulo f g h æquale esse triangulo c l h. ducantur enim c k, b n æquidistantes ipsi d h. & quoniam linea c m sectionem contingit; atque applicata est c k; habebit

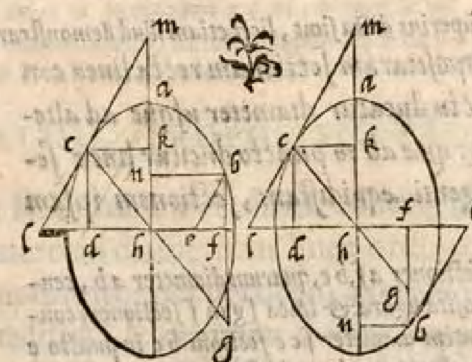


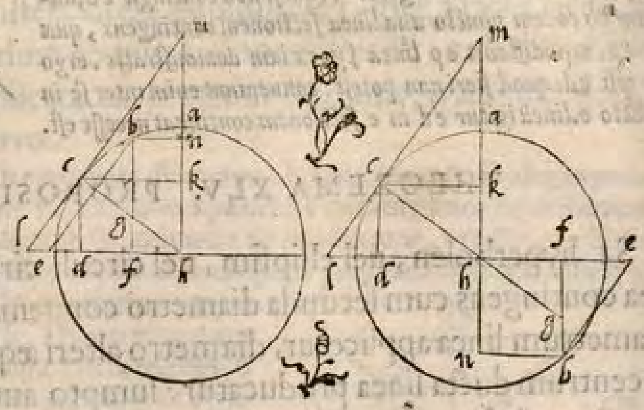
c k ad k h proportionem compositam ex proportione, quam habet m k ad k c: & ex ea, quam rectum figuræ latus habet ad transuersum. ut autem m k ad k c, ita c d ad d l. ergo c k ad k h proportionem compositam habet ex proportione c d ad d l, & ex proportione recti lateris ad transuersum. atque est triangulum c d l figura, quæ fit 39. huius ex k h: & triangulum c h k, hoc est c d h, figura, quæ fit ex c k, hoc est ex d h. quare triangulum c d l in hyperbola quidem maius est, quàm triangulum c k h, triangulo facto ex a h, simili ipsi c d l: in ellipsi uero & circuli circumferentia unà cum ipso c k h eidem triangulo est æquale. hoc enim in parallelogrammis triangulorum duplis in quadragesimo primo theoremate est demonstratum. Itaque quoniam triãgulum c d l à triangulo c k h, uel c d h differt triangulo, quod fit ex a h, ipsi c d l simili: differt autem & triangulo c h l erit c h l triangulum æquale ei, quod fit ex a h, simile ipsi c d l. Rursus quoniam triangulum b f e simile est triangulo c d l: & triangulum g f h triangulo c d h, ipsorum latera inter se eandem proportionem habent. atque est triangulum b f e, quod fit ex n h inter applicatam & centrum interiecta: triangulum uero g f h, quod fit ex b n applicata, hoc est ex f h. Ex iis igitur, quæ prius ostensa sunt, triangulum b f e à triangulo g h f differt triangulo, quod fit ex a h, simili ipsi c d l. quare & triangulo c l h.

p. 43. huius

41. h.

90





p. 43. huius

EVTOCIVS.

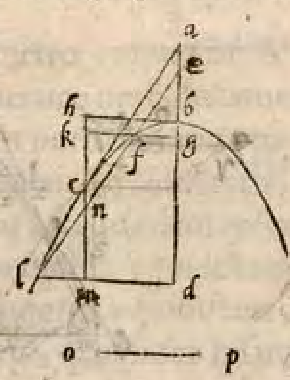
Attendendum est hoc theorema plures habere casus: in hyperbola enim uiginti habet; nam punctum, quod pro b sumitur, uel idem est, quod c, uel idem quod a: & tunc contingit triangulum factum ex a h simile ipsi d c l, idem esse, quod à lineis æquidistantibus ipsis d l, l c abscinditur. Si uero b sumatur inter a c, & puncta d l sint supra terminos secundæ diametri, fient tres casus: nam puncta f e uel supra terminos ferentur, uel in ipsos, uel infra; & si d l sint in terminis secundæ diametri; f e infra terminos erunt. Quod si b sumatur infra c; & b c ad c producatur, tres alios casus fieri contingit, nempe ipso d, uel supra terminos secundæ diametri existente, uel in ipsis, uel infra. & similiter f faciet tres alios casus. sin autem b sumatur ex altera parte sectionis, producetur c b ad b propter demonstrationem: & b f, b e tres casus efficient, quoniam f e uel ad terminos secundæ diametri ferentur, uel supra, uel infra. Ellipsis uero, & circuli circumferentiæ uarios casus nunc non explicabimus, cum de his satis dictum sit in præcedenti theoremate. erunt igitur huius theorematis casus omnes centum. Sed possunt hæc eadem etiam in oppositis sectionibus demonstrari.

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO XLVI.

Si parabolen recta linea contingens cum diametro conueniat; quæ per tactum ducitur diametro æquidistans ad easdem partes sectioni, lineas in sectione ductas, quæ contingenti æquidistant, bifariam secabit.

Sit

Sit parabole, cuius diameter a b d: & linea a c sectionem contingat: per c uero ducatur h c m æquidistans a d: & sumpto in sectione quouis puncto l ducatur l n f e, quæ ipsi a c æquidistet. Dico l n ipsi n f æqualem esse. ducantur enim ordinatim b h, k f g, l m d. & quoniam ex his, quæ in quadragesimo secundo theoremate demonstrauimus, triangulum e l d æquale est parallelogrammo b m, & triangulum e f g parallelogrammo b k; erit parallelogrammum g m, quod relinquitur æquale quadrilatero l f g d. commune auferatur m d g f n quinquelaterum. reliquum igitur triangulum k f n reliquo l m n est æquale. Sed linea k f æquidistat l m. ergo f n ipsi n l æqualis erit.

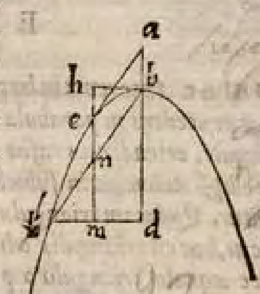


In Parabola æquidistantes omnes principali diametro sunt diametri

42. huius

EVTOCIVS.

Hoc theorema plures casus habet. demonstrabimus autem habita ratione casuum quadragesimi secundi theorematis; ut exempli caussa si f cadat in b, ita dicemus. Quoniam triangulum b d l æquale est parallelogrammo h b d m, commune auferatur n m d b, erit reliquum, triangulum scilicet l n m æquale reliquo h n b. In alijs autem ad hunc modum. Quoniam triangulum l e d parallelogrammo h b d m est æquale; & triangulum f e g parallelogrammo h b g k, erit reliquum l f g d æquale reliquo k g d m. Commune auferatur n f g d m. reliquum igitur triangulum l n m reliquo k n f est æquale.



FED. COMMANDINVS.

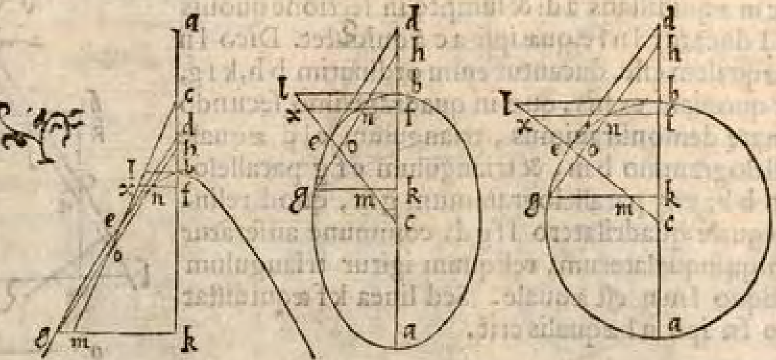
Sed linea k f æquidistat l m, ergo f n ipsi n l æqualis erit.] *Quoniam enim æquidistant k f, l m, angulus f k n æqualis est angulo l m n: anguli autem ad n secundum uerticem inter se sunt æquales. ergo & reliquus æqualis reliquo: & triangulum f k n triangulo l m n simile. Itaque fiat ut f n ad n l, sic n l ad aliam lineam, quæ sit o p; erit linea f n ad o p, ut triangulum f k n ad ipsum l m n. quare linea f n lineæ o p est æqualis. Sed cum tres lineæ f n, n l, o p proportionales sint, sequitur rectangulum ex f n, o p; hoc est quadratum f n quadrato n l æquale esse: & propterea lineam f n lineæ n l æqualem.* 29. primi 15 cor. 20. sexti 16. sexti.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO XLVII.

Si hyperbolen, uel ellipsim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conueniat: per tactum, & centrum ducta linea ad easdem partes sectioni, lineas, quæ in sectione ducuntur, contingenti æquidistantes bifariam secabit.

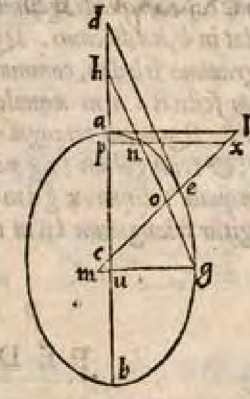
Sit hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b, centrum c: ducaturque d e sectionem contingens: & iuncta c e producatur. Sumpto autem in sectione quouis puncto n, ducatur per n linea h n o g ipsi d e æquidistans. Dico n o ipsi o g æqualem esse. applicentur enim ordinatim x n f, b l, g m k. ergo ex
p 43 huius demonstratis in quadragesimo tertio theoremate triangulum h n f æquale est quadrilatero l b f x: & g h k triangulum quadrilatero l b k m. reliquum igitur n g k f quadrilaterum reliquo m k f x est æquale. commune auferatur o n f x m quinquelaterum.

In hyperbola quæcumque linea ex centro sectioni occurrens est diameter aciem in ellipsi et Circulo



erit reliquum triangulum o m g æquale reliquo o x n. atque est m g æquidistans n x. ergo n o ipsi o g est æqualis.

EVTOCIVS.

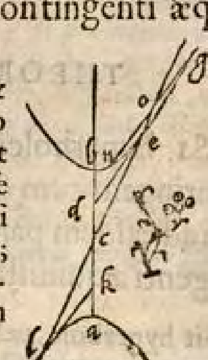


Hoc theorema in hyperbola tot habet casus, quot habebat præcedens in parabola. demonstrationes autem eorum faciemus, attendentes casus quadragesimi tertij theorematis: & in ellipsi itidem, ut in subiecta figura, cum punctum g extra sumitur. Quoniam triangulum l a c æquale est triangulis h g u, u c m, hoc est triangulis o h c, o m g: atque est idem triangulum l a c æquale triangulo x p c, & quadrilatero l a p x, hoc est triangulo n h p: ex his, quæ demonstrata sunt in quadragesimo tertio theoremate, erunt triangula x p c, n h p æqualia triangulis o h c, o m g. commune auferatur triangulum o h c. reliquum igitur triangulum x o n æquale est reliquo m o g: & est n x æquidistans m g. ergo n o ipsi o g est æqualis.

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO XLVIII.

Si unam oppositarum sectionum recta linea contingens cum diametro conueniat: & per tactum & centrum linea producta secet alteram sectionem: quæ in altera sectione ducta fuerit, contingenti æquidistans à linea producta bifariam secabitur.

In oppositis Sectionibus unaquaeque earum quae ex centro ducit Diameter est.



Sint oppositæ sectiones, quarum diameter a b, centrum c: & linea x l sectionem contingat: iunctaq; l c producatur. sumpto autem in b sectione puncto n, per n ducatur n g, quæ æquidistet l k. Dico lineam n o ipsi o g æqualem esse. Ducatur enim per e sectionem contingens e d, erit e d ipsi l k æquidistans: quare & ipsi n g. Quoniam igitur hyperbole est b n g, cuius centrum c: lineaq; d c sectionem contingit; & iuncta est c e: sumpto autem in sectione puncto n, per n ipsi d c æquidistans ducta est n g: ex iis, quæ in hyperbola ostendimus, erit n o ipsi o g æqualis.

ex demõstratis ab Eutocio i 44. huius

EVTOCIVS.

Hvivs etiam theorematis casus ita se habent, ut in quadragesimo septimo theoremate dictum est de hyperbolæ descriptione.

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO XLIX.

SI parabolen recta linea contingens cum diametro conueniat: & per tactum ducatur linea diametro æquidiſtans: à uertice uero ducatur æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt: & fiat ut portio contingentis inter applicatam & tactum interiecta ad portionem æquidiſtantis, quæ itidem inter tactum, & applicatam interiicitur; ita quædam recta linea ad duplam contingentis: quæ à ſectione ducta fuerit, æquidiſtans contingenti ad lineam, quæ per tactum ducitur diametro æquidiſtans, poterit rectangulum contentum inuënta linea, & ea, quæ inter ipſam & tactum interiicitur.

Inuentio recti lateris ad quamlibet diametrum parabolæ non principalem.

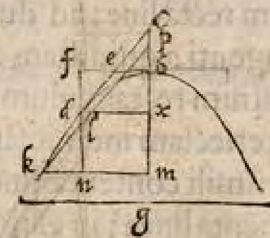
SIT parabole, cuius diameter m b c: & linea c d ſectionem contingat: per d uero ipſi b c æquidiſtans ducatur f d n: & f b ordinatim applicetur: fiatq; ut c d ad d f, ita quædam recta linea g ad duplam ipſius c d: & ſumpto in ſectione puncto k, ducatur per k ipſi c d æquidiſtans k l p. Dico quadratum k l æquale eſſe rectangulo, quod fit ex linea g & d l; hoc eſt diametro exiſtente d l, lineam g eſſe rectum latus. applicentur enim ordinatim d x, k n m. & quoniam c d ſectionem contingit, ordinatim uero applicata eſt d x, erit c b æqualis b x. ſed b x eſt æqualis. f d. ergo 35. huius c b ipſi f d æqualis erit: & propterea triangulum e c b æquale triangulo e f d. commune addatur, figura ſcilicet d e b m n. quadrilaterum igitur d c m n æquale eſt parallelogrammo f m, hoc eſt triangulo k p m: commune auferatur 42. huius quadrilaterum l p m n. ergo reliquum triangulum k l n parallelogrammo l c eſt æquale. angulus autem d l p æqualis A eſt angulo k l n. quare rectangulum k l n duplum eſt rectanguli l d c. quoniam igitur ut c d ad d f, ita eſt linea g ad duplam ipſius c d: & ut c d ad d f, ita k l ad l n: erit ut g ad duplam c d, ita k l ad l n. ſed ut k l ad l n, ita quadratum k l ad rectangulum k l n. & ut g ad duplam c d, ita rectangulum, quod fit ex g & d l ad duplum rectanguli c d l. quare ut quadratum k l ad rectangulum k l n, ita rectangulum ex g & d l ad duplum ipſius c d l rectanguli: & permutando. eſt autem k l n rectangulum æquale duplo rectanguli c d l. ergo quadratũ k l rectangulo ex g & d l æquale erit.

8. lemm. pappi

4. ſexti

lemm. 22 decimi.

1. ſexti

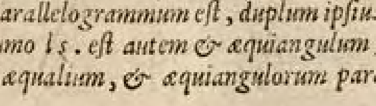


EVTOCIVS.

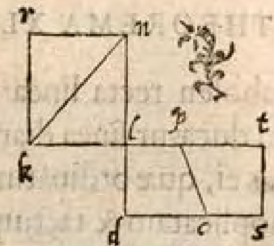
ERGO reliquum triangulum k l n parallelogrammo d l p c eſt æquale. angulus autem d l p æqualis eſt angulo k l n. quare rectangulũ k l n duplũ eſt rectanguli l d c] A *Triangulum enim k l n ſeorſum deſcribatur: itemq; parallelogrammum d l p c. & quoniam triangulum k l n æquale eſt parallelogrammo d p, ducatur per n ipſi l k æquidiſtans, quæ ſit n r: & per k ducatur k r æquidiſtans l n. parallelogrammum igitur eſt l r, & duplum trianguli k l n. quare & parallelogrammi d p duplum. producantur d c, l p ad puncta s t: ponaturq; ipſi d c æqualis c s, & p t æqualis ipſi l p; & iungantur s t. ergo d t parallelogrammum eſt, duplum ipſius d p: & idcirco l r parallelogrammum æquale parallelogrammo l s. eſt autem & æquiangulum, quoniam anguli ad l ſecundum uerticem ſunt æquales. ſed æqualium, & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circa æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis respondent. ergo ut k l ad l t, hoc eſt ad d s, ita d l ad l n: proptereáq; rectangulum k l n æquale eſt rectangulo l d s. & cum d s dupla ſit ipſius d c, rectangulum k l n rectanguli l d c duplum erit.*

14. ſexti

16. ſexti.



At si linea d c ipsi l p æquidistet, c p uero non æquidistet ipsi d l, erit d c p l trapezium, & tunc dico rectangulũ k l n æquale esse ei, quod linea d l, & utraque ipsarum c d, l p continetur. Si enim parallelogrammum l r compleatur, sicuti prius: producanturq; d c, l p, ita ut ipsi l p æqualis ponatur c s, & ipsi d c æqualis p t; & iungantur s t: fiet d t parallelogrammum duplum ipsius d p: & eadem erit demonstratio. Hoc autem utile est etiam ad ea, quæ sequuntur.

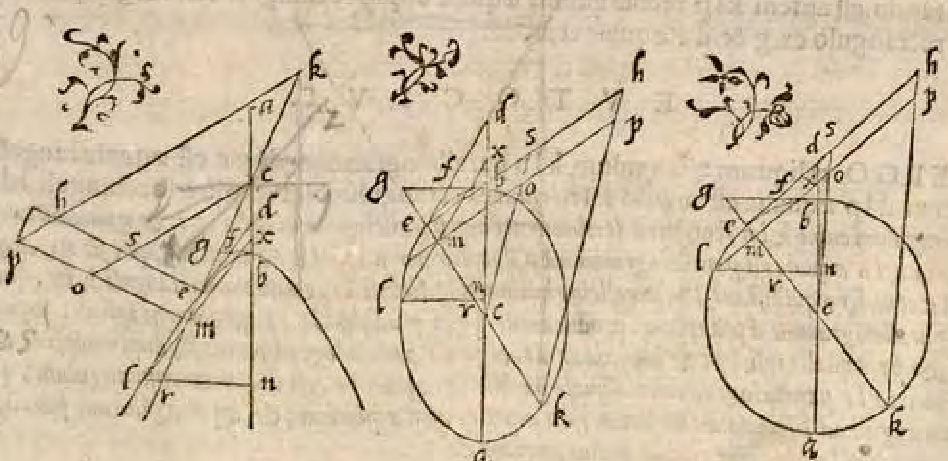


THEOREMA L. PROPOSITIO L.

Inuentio recti lateris ad quamlibet diametrum non principalem hyperbolæ, uel ellipsis.

SI hyperbolen, uel ellipsim, uel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conueniat; & per tactum & centrum linea producatur: à uertice autem ordinatim applicata conueniat cum ea, quæ ducitur per tactum & centrum: fiatq; ut portio contingentis inter tactum & applicatam interiecta, ad portionem lineæ ductæ per tactum & centrum, quæ itidem inter tactum & applicatam interiicitur, ita quædam recta linea ad duplam contingentis: quæ à sectione ducitur contingenti æquidistans ad lineam per tactum & centrum ductam, poterit spatium rectangulum, quod adiacet inuentæ lineæ, latitudinem habens interiectam inter ipsam & tactum; in hyperbola quidem excedens figura simili contentæ linea dupla eius, quæ est inter centrum, & tactum, & inuenta linea; in ellipsi uero & circulo eadem deficiens.

SIT hyperbole, uel ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b, centrũ c: & linea d e sectionem contingat. iuncta uero c e producatur ad utrasq; partes: ponaturq; c k ipsi e c æqualis: & per b ordinatim applicetur b f g: deinde per e ad rectos angulos ipsi e c ducatur e h: fiatq; ut f e ad e g, ita e h ad duplam ipsius e d: &



iuncta h k producatur: sumpto denique in sectione puncto l, per ipsum ducatur l m x quidem ipsi e d æquidistans; l r n uero æquidistans b g; & ipsi e h æquidistans m p. Dico quadratum l m rectangulo e m p æquale esse. ducatur enim per c linea c s o æ-
2. sexti. quidistans k p. Itaque quoniam e c æqualis est ipsi c k; & ut e c ad c k, ita e s ad s h;

erit

erit e s ipsi s h æqualis.& quoniam ut f e ad e g,ita h e ad duplam e d: atque est ipsius e h dimidia e s: erit ut f e ad e g,ita s e ad e d. ut autẽ f e ad e g,ita l m ad m r. A
ergo ut l m ad m r, ita s e ad e d. sed cum demonstratum sit triangulum r n c in hy- B
perbola quidem maius esse,quàm triangulum c g b,hoc est triangulum c d e; in ellip- C
si uero & circulo minus,ipso l n x triangulo: communibus ablatis, in hyperbola scilicet triangulo e c d,& n r m x quadrilatero,in ellipsi autẽ & circulo, triangulo m x c: erit l m r triangulum quadrilatero m e d x æquale. atque est m x æquidistans d e, & angulus l m r æqualis angulo e m x.ergo rectangulum l m r æquale est rectangulo, D
quod linea e m,& utraque ipsarum e d,m x continetur. est autem ut m c ad c e,ita & E
m x ad e d,& m o ad e s. ut igitur m o ad e s,ita m x ad e d: & componẽdo ut utraque m o,s e ad e s,ita utraque m x,d e ad e d.quare permutando,ut utraque m o,s e ad utramque m x,d e,ita s e ad e d.Sed ut utraque m o,s e ad utramque m x,d e,ita re- 1. sexti
ctangulum,quod continetur utraque m o,s e,& ipsa e m, ad contentum utraq; m x, d e & e m. Vt autem s e ad e d,ita f e ad e g,hoc est l m ad m r; uidelicet quadratum l m ad rectangulum l m r. quare ut rectangulum contentum utraque m o,s e,& e m ad contentum utraque m x,d e & e m, ita quadratum l m ad rectangulum l m r: & permutando ut rectangulum contentum utraque m o,s e, & e m ad quadratum m l, ita contentum utraque m x,d e,& e m ad l m r rectangulum. est autem rectangulum l m r æquale rectangulo,quod fit ex e m,& utraque m x,d e.ergo quadratũ l m æquale est rectangulo ex e m,& utraque m o,s e.estq; e s ipsi s h æqualis,& s h ipsi o p.quadratum igitur l m rectangulo e m p æquale erit.

EVTOCIVS.

Casus huius theorematis ita se habent, ut in quadragesimo tertio, & ita casus theorematis quinquagesimi primi.

FED. COMMANDINVS.

VT autem fe ad e g,ita l m ad m r.] *Ob similitudinem triangulorum f e g, l m r. nam cum æquidistent g f,l r,angulus g f e æqualis est angulo r l m; & angulus f g e angulo l r m. ergo & reliquus reliquo æqualis,& triangulum f e g triangulo l m r simile erit.* A 29. primi

Sed cum demonstratum sit triãgulum r n c in hyperbola quidem maius esse, quàm triangulum c g b.] *Etenim in quadragesimo tertio huius demonstratum est triangulum x l n in hyperbola minus esse, quàm triangulum c r n, triangulo c g b; in ellipsi uero & circuli circumferentia unà cum ipso c r n æquale esse triangulo c g b.* B

Hoc est triangulum c d e.] *Triangulum enim c d e triangulo c g b æquale demonstratum est in 43. huius,uidelicet in secunda demonstratione, quam affert Eutocius in commentarijs.* C

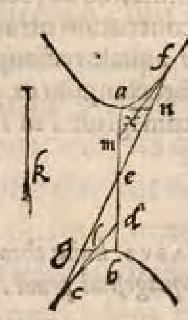
Ergo rectangulum l m r æquale est rectangulo,quod linea e m,& utraque ipsarum e d , m x continetur.] *Ex octauo lemmate Pappi, & ex ijs quæ Eutocius proxime demonstrauit.* D

Est autem ut m c ad c e,ita & m x ad e d, & m o ad e s.] *Ex quarta sexti, sunt enim triangula c e d,c m x similia: itemq; similia inter se triangula c m o,c e s.* E

THEOREMA LI. PROPOSITIO LI.

Si quamlibet oppositarum sectionum recta linea contingens cum diametro conueniat; & per tactum & centrum linea producatur usque ad alteram sectionem: à uertice uero ducatur linea æquidistans ei, quæ ordinatim applicata est; conueniensq; cum linea per tactum,& centrum ducta: & fiat ut portio contingentis inter applicatam & tactum ad portionem lineæ ductæ per tactum, & centrum, quæ inter tactum & applicatam interiicitur, ita quædam recta linea ad duplam contingentis: quæ in altera ſectione ducitur æquidiſtans contingenti, ad lineam per tactũ & centrum ductam, poterit rectangulum, quod adiacet inuentæ lineæ, latitudinem habens, lineam, quæ eſt inter ipſam & tactum; excedensq; figura ſimili ei, quæ linea inter oppoſitas ſectiones interiecta & inuenta continetur.

SINT oppoſitæ ſectiones, quarum diameter a b, centrum e: & linea c d ſectionẽ
c b contingat: iunctaq; c e producatur: ordinatim uero applicetur b l g & fiat ut l c ad
50. huius c g, ſic quædam recta linea k ad duplam c d. itaque perſpicuum eſt in ſectione b c lineas æquidiſtantes c d, quæ ducuntur ad lineam in directum ipſi e c productam, poſſe ſpatia adiacentia lineæ k; latitudinemq; habentia lineam, quæ eſt inter ipſas & tactum, & excedentia figura ſimili contentæ linea c f & k: dupla eſt enim f c ipſius c e. Dico igitur idem euenire in ſectione a f. Ducatur per f linea m f, quæ a f ſectionem contingat: ordinatimq; applicetur a x n. & quoniam oppoſitæ ſectiones ſunt b c, a f: atque ipſas contingunt c d, m f; erit c d ipſi m f æqualis, & æqui-
uide Eut. in 44. huius diſtans. eſt autem c e æqualis e f. ergo & e d ipſi e m. Sed quoniã ut l c ad c g, ita linea k ad duplam c d, hoc eſt m f; erit ut x f ad f n, ita k ad duplam m f. atque eſt hyperbole a f, cuius diameter a b: & m f ipſam contingit: ordinatim uero applicata eſt a n: &
50. huius ut x f ad f n, ita k ad duplam m f. ergo quæcunque à ſectione ducuntur æquidiſtantes f m ad lineam, quæ in directum protenditur ipſi e f, poterunt rectangulum contentum linea k, & interiecta inter ipſas & punctum f, excedensq; figura ſimili ei, quæ linea c f & k continetur.



Caroll.

46. huius Itaque his demonſtratis perſpicuum eſt in parabola unamquamque rectarum linearum, quæ diametro ex generatione du-
47. huius 48. cuntur æquidiſtantes, diametrum eſſe: in hyperbola uero, ellipſi & oppoſitis ſectionibus unamquamque earum, quæ per centrum ducuntur.
49. huius Et in parabola quidem applicatas ad unamquamque diametrum, æquidi-
50 ſtantes contingentibus, poſſe rectangula ipſi adiacentia: in hyperbola &
51 oppoſitis poſſe rectangula adiacentia ipſi, quæ excedunt eadem figura:
50 in ellipſi autem quæ eadem deficiunt. poſtremo quæcunque circa ſectiones adhibitis principalibus diametris demonſtrata ſunt, & aliis diametris aſſumptis eadem contingere.

EVTOCIVS.

DIAMETRVM ex generatione uocat communem ſectionem plani ſecantis, & trianguli per axem, quæ in ipſo cono efficitur; quam & principalem diametrum appellat. Dicit autem omnia accidentia ſectionum, quæ in ſuperioribus theorematibus demonſtrata ſunt, poſitis principalibus diametris, & aliis quibuſcunque diametris aſſumptis eadem contingere poſſe.

PROBLEMA I. PROPOSITIO LII.

Recta linea data in plano, ad unum punctum terminata, inuenire in plano coni ſectionem, quæ parabole appellatur, ita ut eius diameter ſit data linea; uertex lineæ terminus; quæ uero à ſectione ad diametrum

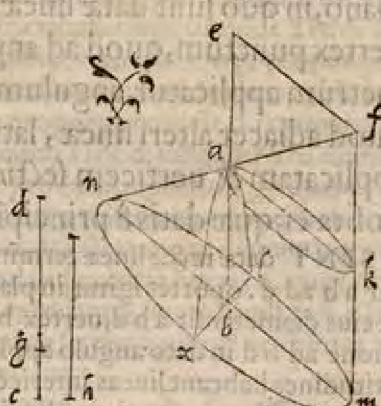
in dato

in dato angulo applicatur, possit rectangulum contentum linea, quæ est inter ipsam & uerticem sectionis, & altera quadam data linea.

SIT recta linea data positione a b, ad a punctum terminata; altera autem magnitudine data c d. & datus angulus primum sit rectus. Itaque oportet in subiecto plano inuenire parabolen, ita ut eius diameter sit a b; & uertex a: rectum autem figuræ latus c d: & ordinatim ductæ in recto angulo applicentur: hoc est ut a b sit axis. producatur a b ad e. sumaturq; ipsius c d quarta pars c g: & sit a e maior, quàm c g. ipsarū autem c d, e a media proportionalis sit h. est igitur ut c d ad e a, ita quadratum h ad e a quadratum. sed c d est minor, quàm quadrupla ipsius e a. ergo & quadratū h quadrati e a minus est, quàm quadruplum: & propterea linea h minor, quàm dupla ipsius e a. Cum igitur duæ lineæ e a, maiores sint, quam h, fieri potest ut ex h, & duabus e a triangulum constituatur. ergo in linea e a cōstituatur triangulum e a f rectum ad subiectum planum, ita ut e a æqualis sit a f; & h æqualis f e: ducaturq; a k æquidistās e f, & f k ipsi e a. Deinde intelligatur conus, cuius uertex f punctum; basis autem circulus circa diametrum k a, rectus ad planum, quod per lineas a f, f k transit. erit igitur is conus rectus, quoniam a f æqualis est f k. Itaque secetur conus plano, quod circulo k a æquidistet; faciatq; sectionem circulum m n x, rectum uidelicet ad planum trāsiens per m f, f n: & sit circuli m n x, & m f n trianguli communis sectio m n. quare m n circuli diameter est. cōmunis autem sectio plani subiecti, & circuli sit x l. Quoniam igitur circulus m n x rectus est & ad subiectum planū, & ad triangulum m f n: communis ipsorum sectio x l ad m n f triangulum, hoc est ad k f a perpendicularis erit. quare & ad omnes rectas lineas; quæ in triangulo ipsam contingunt; & ad utramque ipsarum m n, a b. Rursus quoniam conus basim habens circulum m n x, uerticem uero punctum f, secatur plano ad m f n triangulum recto, quod sectionem facit circulum m n x; & secatur altero plano subiecto, secante basim coni secundum rectam lineam x l, perpendicularem ad m n, quæ communis sectio est circuli m n x, & m f n trianguli: communis autem sectio subiecti plani, & trianguli m f n, uidelicet a b, æquidistans est lateri coni f k m: erit coni sectio in subiecto plano facta, parabole; cuius diameter a b: & lineæ à sectione ad ipsam ab ordinatim ductæ in recto angulo applicabuntur: æquidistantes enim sunt lineæ x l, quæ est ad a b perpendicularis. Et quoniam tres lineæ c d h, e a proportionales sunt; æqualis autem e a ipsi a f, & ipsi f k: atque h æqualis e f, & a k: erit ut c d ad a k, ita a k ad a f. quare ut c d ad a f, ita quadratum a k ad a f quadratum, hoc est ad id, quod a f k continetur. ergo rectum sectionis latus est c d: illud enim in undecimo theoremate demonstratum fuit.

cor. 20. sexti

22. primi



4. huius

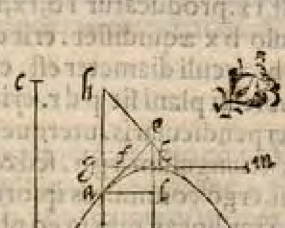
19. undecimi

3. diff. undecimi

11. huius

20. sexti

Iisdem positis non sit datus angulus rectus: intelligaturq; ipsi æqualis, qui h a e continetur: & sit a h dimidia c d: ab h uero ducatur h e ad a e perpendicularis: perq; e ipsi b h æquidistans ducatur e l: & ab a ad e l perpendicularis a l. deinde secta e l bifariam in k, ab ipso k ducatur k m ad rectos angulos ipsi e l: & ad puncta f g producatur: & quadrato a l æquale sit rectangulum l k m. Itaque duabus rectis lineis l k, k m datis; l k quidem positione, quæ ad k terminatur; k m uero magnitudine: & dato angulo recto, describatur parabole, ut dictum est, cuius diameter k l, uertex k, & rectum latus k m. transibit autem per a, propterea quod quadratum a l rectangulo l k m est æquale: & linea a e sectio-



33. huius

46.huius nem continget, quoniam l k æqualis est k e. sed h a æquidistat e k l. ergo h a b diameter erit sectionis: & à sectione ad eam applicatæ ipsi a e æquidistantes bifariam diuidentur à linea a b: & in angulo h a e applicabuntur. quoniam igitur angulus a e h æqualis est angulo a g f, & communis qui ad a; triangulum a h e simile est a g f triangulo. ut ergo h a ad a e, ita f a ad a g: & ideo ut dupla h a ad duplam a e, ita f a ad a g. sed cum c d sit dupla ipsius h a, erit ut f a ad a g, ita c d ad duplam a e. quare per ea, quæ in 49. theoremate ostensa sunt, erit c d rectum sectionis latus.

4. sexti.

15. quinti

PROLEMA II. IROPOSITIO LIII.

Datis duabus rectis lineis terminatis, quæ ad rectos inter se angulos A constituantur: & altera producta ad easdem partes angulo recto, inuenire in linea producta coni sectionem, quæ hyperbole dicitur, in eodem plano, in quo sunt datæ lineæ; ita ut producta sit diameter sectionis, & uertex punctum, quod ad angulum cōsistit: quæ uero à sectione ad diametrum applicatur, angulum faciens æqualem dato, possit rectangulū, quod adiacet alteri lineæ, latitudinem habens lineam interiectam inter applicatam & uerticem sectionis; excedensq; figura simili, & similiter posita ei, quæ datis à principio lineis continetur.

SINT datæ rectæ lineæ terminatæ a b, b c, ad rectos inter se angulos: & producatur a b ad d. oportet igitur in plano, quod per a b c transit, inuenire hyperbolen, ita ut eius diameter sit a b d, uertex b punctum, & rectum figuræ latus b c. quæ uero à sectione ad b d in dato angulo applicentur, possint rectangula adiacentia ipsi b c, quæ latitudines habeant lineas interiectas inter ipsas, & punctum b: excedantq; figura simili, & similiter posita ei, quæ lineis a b, b c continetur. B sit datus angulus primum rectus; & ex linea a b planum attollatur, rectum ad subiectum planum, in quo circa lineā a b circulus describatur a e b f; ita ut pars diametri circuli, quæ in portione a e b comprehenditur ad partem comprehensam in portione a f b, non maiorem proportionem habeat, quàm a b ad b c. & secetur a e b circumferentia bifariam in e: ducaturq; à puncto e ad a b perpendicularis e k: & ad l producatur. ergo e l diameter est circuli. Quod si ut a b ad b c, ita fuerit e k ad k l, utemur puncto l; sin minus fiat ut a b ad b c, ita e k ad minorem ipsa k l, quæ sit k m: & per m ducatur m f æquidistans a b: iunctisq; a f, e f, f b, per b ducatur b x ipsi f e æquidistans. Itaque quoniam angulus a f e æqualis est angulo e f b: angulus autem a f e angulo a x b: & e f b ipsi f b x: erit & f b x angulus angulo f x b æqualis: quare & linea f b æqualis lineæ f x. intelligatur conus, cuius uertex f, & basis circulus circa diametrum b x, rectus ad f b x triangulum. erit utique is conus rectus, quia f b æqualis est f x. producātur f b, f x, m f: & secetur conus plano, quod circulo b x æquidistet. erit ea sectio circulus, qui sit g p h r. ergo g h circuli diameter est. communis autem sectio circuli g h, & subiecti plani sit p d r. erit p d r ad utranque ipsarum g h, d b perpendicularis. uterque enim circulorum x b, h g rectus est ad triangulum f g h. sed & subiectum planum ad f g h rectum est. ergo communis ipsorum sectio p d r, erit & ad f g h perpendicularis, & ad omnes rectas lineas, quæ in eo plano consistentes, ipsam contingunt. Quoniam igitur conus, cuius basis est circulus g h, & uertex f, secatur plano ad f g h triangulum recto; quod facit sectionem circulum; secatur autem, & altero plano subiecto, secante basim coni secundum rectam lineam p d r, perpendicularem ad g d h: & communis sectio subiecti plani, & trianguli f g h, uidelicet d b producta ad b conuenit cum g f in puncto a: erit ex iis, quæ demonstrata sunt, sectio p b r hyperbole, cuius uertex b: & ordi-

1. tertii

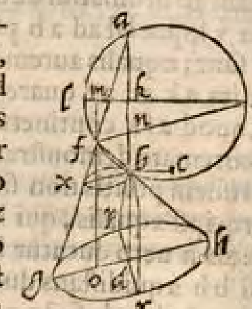
27 tertii

29. primi.

6. primi.

19. undecimi

11. huius

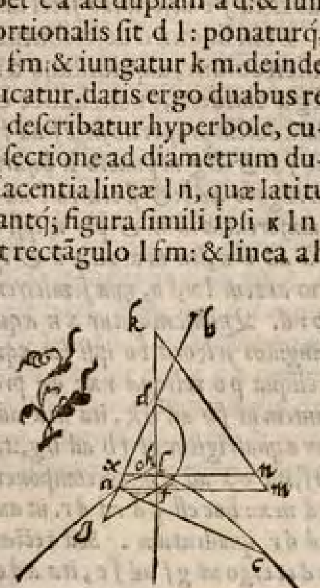


ordinatim ductæ ad diametrum b d in recto angulo applicabuntur. æquidistantes etenim sunt ipsi p d r. præterea quoniam ut a b ad b c, ita est e k ad k m: & ut e k ad k m, ita e n ad n f, hoc est rectangulum e n f ad n f quadratum: erit ut a b ad b c, ita e n f rectangulum ad quadratum n f. sed e n f rectangulũ æquale est rectangulo a n b. ergo ut a b ad b c, ita rectangulum a n b ad n f quadratum. rectangulum autem a n b ad n f quadratum proportionem habet compositam ex proportione a n ad n f: & ex proportione b n ad n f. sed ut a n ad n f, ita a d ad d g, & f o ad o g: & ut b n ad n f, ita f o ad o h. quare a b ad b c proportionem compositam habet ex proportione f o ad o g, & ex proportione f o ad o h: hoc est ex proportione quadrati f o ad rectangulum g o h. est igitur ut a b ad b c, ita quadratum f o ad g o h rectangulum. atque est f o æquidistans a d. Sequitur ergo, ut a b sit transuersum figuræ latus, & b c rectum: etenim hæc in duodecimo theoremate ostensa sunt.

2. sexti — lem. in 29 decimi — 35. tertii — 23. sexti — 4. sexti — 23. sexti — C

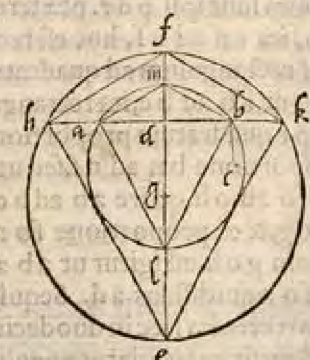
Non sit autem datus angulus rectus: sintq; rectæ lineæ datæ a b, a c: & datus angulus æqualis sit ei, qui b a h continetur. oportet igitur describere hyperbolen, ita ut eius diameter sit a b, & rectũ latus a c: ductæ uero ad diametrum in angulo b a h applicentur. secetur a b bifariam in d: & in linea a d describatur semicirculus a f d: & ducatur quædam recta linea f g in semicirculum, æquidistans a h; faciensq; proportionem quadrati f g ad rectangulum d g a eandem, quam habet c a ad duplam a d: & iuncta f h d producatur. ipsarum autem f d, d h media proportionalis sit d l: ponaturq; ipsi l d æqualis d k; & quadrato a f æquale rectangulum l f m: & iungatur k m. deinde per l ad rectos angulos ipsi κ f ducatur l n. & ad x producatur. datis ergo duabus rectis lineis terminatis, & ad rectos inter se angulos, κ l, l n describatur hyperbole, cuius transuersum quidem latus sit κ l; rectum uero l n; & à sectione ad diametrum ductæ in recto angulo applicentur, & possint rectangula adiacentia lineæ l n, quæ latitudines habeant interiectas inter ipsas & punctum l, excedantq; figura simili ipsi κ l n. transibit igitur sectio per a, cum quadratum a f æquale sit rectãgulo l f m: & linea a h sectionem continget; rectangulum enim f d h quadrato d l est æquale. ergo a b diameter est sectionis. Et quoniã ut c a ad duplam a d, hoc est ad a b, ita quadratum f g ad rectangulum d g a: sed c a ad duplam a d compositam proportionem habet ex proportione c a ad duplam a h, & ex proportione duplæ a h ad duplã d a, hoc est ex proportione h a ad a d, hoc est f g ad g d: habebit c a ad a b proportionem compositam ex proportione c a ad duplam a h, & ex proportione f g ad g d. habet autem & quadratum f g ad rectangulum d g a proportionem cõpositam ex proportione f g ad g d, & ex proportione f g ad g a. proportio igitur composita ex proportione c a ad duplam a h, & ex proportione f g ad g d eadem est, quæ proportio composita ex proportione f g ad g d, & ex proportione f g ad g a. Communis auferatur proportio, quæ est f g ad g d. ergo ut c a ad duplam a h, ita f g ad g a. & ut f g ad g a, ita o a ad a x. ut igitur c a ad duplam a h, ita o a ad a x. Quod cum ita sit, erit a c linea, iuxta quam possunt, quæ à sectione ducuntur: hoc enim in quinquagesimo theoremate demonstratum est.

D — E — F 12 huius — 47. huius — hoc idem haberi potest ... 37 huius — 15. quinti — 4. sexti — 4. sexti



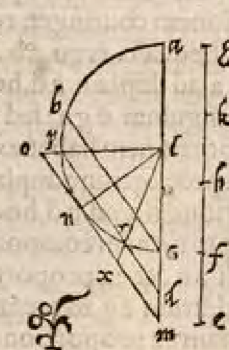
EVTOCIVS.

ET ex linea a b planum attollatur, rectum ad subiectum planum, in quo circa lineã a b circulus describatur a e b f, ita ut pars diametri circuli, quæ in portione a e b comprehenditur ad partem comprehensam in portione a f b, non maiorem proportionem habeat, quàm a b ad b c.] *Sint duæ rectæ lineæ a b, b c; & oporteat circa a b circulum describere, cuius diameter à linea a b ita diuidatur, ut pars ipsius, quæ est ad e ad reliquã partem non maiorem proportionem habeat, quàm a b ad b c. ponatur nunc eandem habere: seceturq; a b bifariam in d: & per d ad rectos angulos ipsi a b, ducatur e d f: & fiat ut a b ad b c, ita e d, ad d f: atque e f bifariam secetur. constat ergo, si quidem a b sit æqualis b c; & e d ipsi d f æqualẽ* B *esse: & ideo punctum d lineam e f bifariam secare: si uero a b sit maior b c, & e d ipsa d f, punctũ quod bifariam lineam e f secat, infra d cadet: & si minor sit, cadet supra. sed infra cadat ut g: & centro quidem g; interuallo autem g f circulus describatur. necessarium utique est eum, uel per puncta a b transire, uel extra, uel intra. & si transeat per a b, factum iam erit, quod oportebat. si uero trãseat extra, producatur a b in utranque partem, ut conueniat cum circumferentia circuli in punctis h k: iunctisq; f h, h e, e k, k f, ducatur per b linea m b, æquidistans f k: & b l æquidistans k e: & iungantur m a, a l, quæ ipsis f h, h e æquidistabunt, propterea quod æquales inter se sint a d, d b: itemq; h d,*



31. tertij. *d k, & e d f ad rectos angulos ipsi h k. Quoniam igitur angulus, qui ad k rectus est: & m b, b l æquidistãt ipsis f k, k e:*
29. quinti *erit & qui ad b rectus. & eadem ratione, qui ad a. quare circulus circa m l descriptus per puncta a b transibit. Itaque describatur, sitq; m a l b. & quoniam*
4. sexti *m b æquidistans est ipsi f k, erit ut f d ad d m, ita k d ad d b: & similiter ut k d ad d b, ita e d ad d l: & permutando, ut e d ad d f, ita l d ad d m. ergo ut a b ad b c, ita l d ad d m. Quod si circulus circa f e descriptus secet lineam a b, idem nihilominus demonstrabitur.*

D Et in linea a d describatur semicirculus a f d, & ducatur quædam recta linea f g in semicirculum, æquidistans a h; faciensq; proportionem quadrati f g ad rectangulum d g a eandem, quam habet c a ad duplam a d.] *Sit semicirculus a b c circa diametrum a c: data autem proportio sit e f ad f g: & oporteat facere ea, quæ proposita sunt. ponatur ipsi e f æqualis f h: & h g in puncto k bifariam diuidatur: ducaturq; in semicirculo quæpiam recta linea c b, in angulo a c b: & à centro l ad ipsam perpendicularis ducatur, quæ producta occurrat circuli cir-*
29. primi 16. tertij. *cumferentiæ in n: & per n ipsi c b æquidistans n m. ergo n m circulum continget. Itaque fiat ut f h ad h k, ita m x ad x n: & ipsi x n æqualis ponatur n o. iungantur autem l x, l o, quæ semicirculum in punctis r p secent: & ducatur p r d. Quoniam igitur x n æqualis est n o, communisq; & ad rectos angulos n l; erit l o ipsi l x æqualis. Sed l p est æqualis l r. ergo &*
2. sexti. *reliqua p o reliquæ r x; & propterea p r d ipsi o m æquidistat. est autem ut f h ad h k, ita m x ad x n. & ut h k ad h g, ita x n ad x o. ex æquali igitur ut f h ad h g, ita m x ad x o: conuertendoq; ut g h ad h f, ita o x ad x m: & componendo ut g f ad f h, hoc est ad f e, ita o m ad m x: hoc est p d ad d r. ut autem p d ad d r, ita rectangulum p d r*
36. tertij. *ad d r quadratum. Sed rectangulum p d r æquale est rectangulo a d c. ergo ut g f ad f e, ita a d c rectangulum ad quadratum d r: & conuertendo ut e f ad f g, ita quadratum d r ad rectangulum a d c.*



FED. COMMANDINVS.

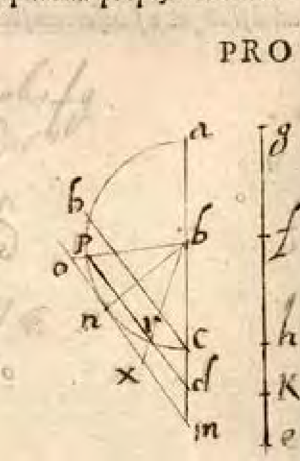
A Inuenire in linea producta coni sectionem, quæ hyperbole dicitur.] *Græcus codex ita habet,* εὑρεῖν ἐπὶ τῆς προσεκβληθείσης κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολήν. *Sed uide ne uerba illa.* ἐπὶ τῆς προσεκβληθείσης, *superuacanea sint: statim enim subiungit.* ὅπως ἡ μὲν προσεκβληθεῖσα διάμετρος ᾖ τῆς τομῆς.

C Est igitur ut a b ad b c, ita quadratum f o ad g o h rectangulum.] *Ad hunc locum ut opinor, nonum Pappi lemma pertinet, in quo ostenditur, ut quadratum f o ad rectangulum g o h, ita esse rectangulum a n b ad n f quadratum.*

E Faciensq; proportionem quadrati f g ad rectangulum d g a eandem, quam habet c a ad duplam a d.] *In græco codice legitur* ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ζη πρὸς τὸ ὑπὸ δηα λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αγ πρὸς αβ. *sed legendum est, ut apud Eutocium.* τὸν αὐτὸν τῷ τῆς αγ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αδ. *quod etiam ex ijs, quæ sequuntur perspicue apparet.*

F Et linea a h sectionem continget: rectangulum enim f d h quadrato d l est æquale.]
17. sexti *Nam cum inter lineas f d, d h proportionalis facta sit d l, rectangulum f d h æquale est quadrato d l. quare ex ijs, quæ demonstrauimus in commentarijs in trigesimam septimam propositionem huius, linea a h sectionem ipsam contingat necesse est.*

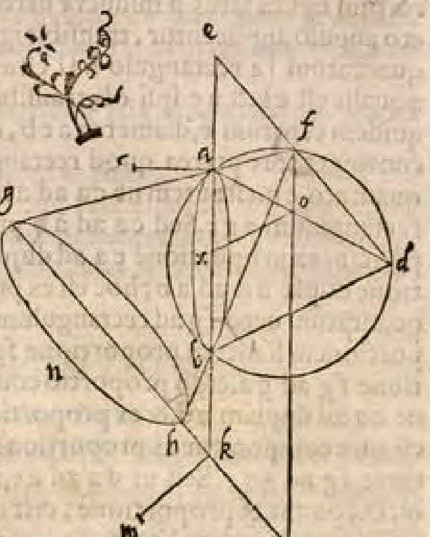
PRO



PROBLEMA III. PROPOSITIO LIIII.

DATIS duabus rectis lineis terminatis, atque ad rectos inter se angulos, inuenire circa diametrum alteram ipsarum, coni sectionem, quæ ellipsis appellatur, in eodem plano, in quo sunt datæ lineæ: ita ut uertex sit punctum ad rectum angulum: & à sectione ad diametrum applicatæ in angulo dato possint rectangula adiacentia alteri lineæ, quæ latitudinem habeant, lineam inter ipsas & uerticem sectionis interiectam, deficiantq; figura simili, & similiter posita ei, quæ datis rectis lineis continetur.

Sint datæ rectæ lineæ a b, a c ad rectos angulos constitutæ, quarum maior a b. Itaque oportet in subiecto plano describere ellipsim, ita ut eius diameter sit a b, uertex a, & rectum latus a c: ductæ uero à sectione ad a b in dato angulo applicentur: & possint spatia adiacentia lineæ a c, quæ latitudines habeant, lineas interiectas inter ipsas, & punctum a: deficiantq; figura simili, & similiter posita ei, quæ lineis b a, a c continetur. Sit datus angulus primum rectus: & ex linea a b planum attollatur, rectum ad subiectum planum; in quo ad a b circuli portio a d b descripta bifariam diuidatur in d: & iungantur d a, d b: ponatur autem ipsi a c æqualis a x: & per x ducatur x o æquidistans b d: & per o ipsa o f æquidistans a b: iunctaq; d f conueniat cum a b pro
ducta in puncto e. erit igitur ut b a ad a c, ita b a ad a x; hoc est d a ad a o, hoc est d e 7. quinti.
ad e f. deinde iungantur a f, f b, & producantur: sumaturq; in f a quoduis punctum 4. sexti
g. & per g ipsi d e æquidistans ducatur g l, quæ cum a b producta conueniat in k. denique producatur f o: & conueniat cum g k in l. Quoniam igitur circumferentia a d
æqualis est ipsi d b; & angulus a b d angulo d f b æqualis erit. & quoniam angulus e f a 26. tertii
æqualis est duobus angulis f a d, f d a; atque est f a d angulus æqualis angulo f b d, & 32. primi
f d a ipsi f b a: erit angulus e f a æqualis angulo d b a, hoc est b f d. Sed cum d e æqui-
distet ipsi l g: & angulus e f a æqualis est angulo f g h: & d f b ipsi f h g. quare sequitur, 29. primi.
ut f g h angulus angulo f h g sit æqualis: & linea f g lineæ f h. Itaque circa g h descri- 6. primi
batur circulus g h n, rectus ad triangulum h g f: & intelligatur conus, cuius basis circulus g h n, & uertex punctum f. erit is conus rectus, quod g f æqualis sit f h. & quoniam circulus g h n rectus est ad h g f planum: est autem & planum subiectum rectum ad planum, quod per g h f transit: communis ipsorum sectio ad planum per g h f per-
pendicularis erit. communis autem sectio sit 19. undecimi
linea k m. ergo k m perpendicularis est ad utramque ipsarum a k, k g. Rursus quoniam conus, cuius basis est circulus g h n, & uertex f, secatur plano per axem, quod facit sectionem triangulum g h f: secatur autem, & altero plano per a k, k m transeunte, quod est subiectum planum, secundum rectam lineam k m, perpendicularem ad g k: & planum occur-
rit ipsis g f, f h lateribus coni: erit facta sectio 13. huius
ellipsis, cuius diameter a b. ductæ uero à sectione ad a b in recto angulo applicabuntur; sunt enim ipsi k m æquidistantes. & quoniam ut d e
ad e f, ita rectangulum d e f, hoc est b e a ad qua- 36. tertii
dratum e f: rectangulum autem b e a ad quadratum e f compositam proportionem habet ex proportione b e ad e f, & ex proportione a e
ad e f: utque b e ad e f, ita b k ad k h, hoc est f l
ad l h: & ut a e ad e f, ita a k ad k g; hoc est f l ad 4. sexti



A lg: habebit b a ad a c proportionem compoſitam ex proportione fl ad l g;& ex pro
portione fl ad l h.quæ quidem proportio eadem eſt,quã habet quadratum fl ad g l h
rectangulum. ergo ut b a ad a c,ita fl quadratum ad rectangulum g l h. Quòd cum
ita ſit, linea a c rectum erit figuræ latus, ut oſtenſum eſt in 13. theoremate.
Iiſdem poſitis, ſit linea a b minor ipſa a c: & oporteat circa diametrum a b ellip-
ſim deſcribere, ita ut a c rectum ſit figuræ latus. Secetur a b bifariam in d; à quo ad
rectos angulos ipſi a b ducatur e d f: & rectangulo b a c æquale ſit quadratum f e: &
linea f d æqualis d e: lineæ uero a b æquidi-
ſtans ducatur f g: & fiat ut c a ad a b, ita e f

B ad f g. maior eſt igitur e f quàm f g. Itaque
quoniam rectangulum c a b æquale eſt qua-
drato e f,ut c a ad a b, ita eſt quadratum f e
15.quinti ad quadratum a b; & quadratum f d ad d a
quadratũ.ut autem c a ad a b, ita e f ad f g.
ergo ut e f ad f g, ita quadratum f d ad qua-
dratum d a.ſed quadratum f d æquale eſt rectangulo f d e. quare ut e f ad f g, ita re-
ctangulum e d f ad d a quadratum.Duabus igitur rectis lineis terminatis, aptatisq;
ad rectos inter ſe angulos,quarum maior eſt e f,deſcribatur ellipſis, ita ut e f diame-
C ter ſit,& f g rectum figuræ latus. tranſibit utique ſectio per a, quoniam ut rectangu-
lum f d e ad quadratum d a,ita eſt e f ad f g:atque eſt a d æqualis d b. tranſibit igitur
etiam per b,ac propterea ellipſis circa a b deſcripta erit.& quoniam ut c a ad a b,ita
quadratum f d ad quadratum d a: atque eſt quadratum d a rectangulo a d b æquale:
D erit ut c a ad a b, ita d f quadratum ad rectangulum a d b.quare a c rectum eſt figu-
ræ latus.
E Sed non ſit datus angulus rectus:ſitq; ipſi æqualis b a d: & ſecta a b bifariam in e,
circa lineam a e ſemicirculus a f e deſcribatur;in quo ipſi a d æquidiſtãs ducatur f g;
ita ut faciat proportionem quadrati f g ad rectangulum a g e eandem,quam habet li
nea c a ad a b:& iunctæ a f,e f producantur: & ſumatur ipſarum d e, e f media pro-
portionalis e h,cui æqualis ponatur e k. fiat autem qua-
drato a f æquale rectangulum h f l:iungaturq; k l: & per h
ipſi h f ad rectos angulos ducatur m h x, æquidiſtans ipſi
31: tertii a f l;rectus eſt enim angulus,qui ad f. Itaque datis duabus
rectis lineis terminatis, & ad rectos inter ſe angulos k h,
h m,deſcribatur ellipſis, cuius diameter tranſuerſa k h, &
rectum figuræ latus h m: ductæ uero à ſectione ad h k,in re
13. huius cto angulo applicentur. tranſibit igitur ſectio per a, quia
quadratum f a rectangulo h f l eſt æquale.Et quoniam h e
æqualis eſt e k,& a e ipſi e b,tranſibit & per b ſectio;cuius
F quidem centrum e,diameter a e b, & linea d a ſectionem
continget; propterea quod rectangulum d e f æquale eſt
quadrato e h.eſt autem ut c a ad a b,ita f g quadratum ad
rectangulum a g e.Sed c a ad a b proportionem habet cõ
poſitam ex proportione c a ad duplam a d, & ex propor-
tione duplæ a d ad a b; hoc eſt ex proportione d a ad a e.
quadratum uero f g ad rectangulum a g e compoſitã pro-
portionem habet ex proportione f g ad g e,& ex propor-
tione f g ad g a.ergo proportio compoſita ex proportio-
ne c a ad duplam a d,& ex proportione d a ad a e, eadem
eſt,quæ componitur ex proportione f g ad g e,& propor-
4. ſexti tione f g ad g a. Sed ut d a ad a e,ita f g ad g e. ergo ſu-
blata communi proportione, erit ut c a ad duplam a d,ita f g ad g a; hoc eſt x a ad
G a n. Quando autem hoc ita ſit, linea a c rectum eſt figuræ latus.

EVTO-

EVTOCIVS.

Et secta a b bifariam in e, circa lineam a e semicirculus a f e describatur, in quo ipsi a d æquidistans ducatur f g, ita ut faciat proportionem quadrati f g ad rectangulum a g e eandem, quam habet linea c a ad a b.] *Sit semicirculus a b c, in quo recta linea quæpiam a b: ponáturq; duæ rectæ lineæ inæquales d e, e f: & producatur e f ad g, ut sit f g æqualis d e: & e g in h bifariam diuidatur. Sumpto autem circuli centro k, ab eo ducatur perpendicularis ad a b, quæ circumferentiæ circuli occurrat in l: perq; l ipsi a b æquidistans ducatur l m: & k a producta conueniat cum l m in puncto m. deinde fiat ut h f ad f g, ita l m ad m n: atque ipsi l n æqualis sit l x: & iunctæ n k, k x producantur adeo, ut à completo circulo secentur in punctis o p: & iungatur o r p. Quoniam igitur ut h f ad f g, ita est l m ad m n; componendo erit ut h g ad g f, ita l n ad n m: & conuertendo ut f g ad g h, ita m n ad n l. ut autem f g ad g e, ita m n ad n x: & diuidendo ut g f ad f e, ita n m ad m x. quòd cum n l æqualis sit l x, communisq; & ad rectos angulos l k; erit & k n æqualis k x. & est k o ipsi k p æqualis. æquidistans igitur est n x ipsi o p: atque ob id triangulum k m n simile triangulo k r o: & triangulum k m x ipsi k r p. ergo ut k m ad k r, ita m n ad r o. Sed ut k m ad k r, ita m x ad p r. quare ut m n ad r o, ita m x ad p r: & permutando ut n m ad m x, ita o r ad r p. ut autem n m ad m x, ita g f ad f e, hoc est d e ad e f: & ut o r ad r p, ita quadratum o r ad rectangulum o r p. ergo ut d e ad e f, ita o r quadratum ad rectangulum o r p. atque est rectangulum o r p rectangulo a r c æquale, ut igitur d e ad e f, ita quadratum o r ad rectangulum a r c.* 35.tertii

FED. COMMANDINVS.

Habebit b a ad a c proportionem compositam.] *Superius namq; demonstratum est b a ad a c ita esse, ut d e ad e f.* A

Itaque quoniam rectangulum c a b æquale est quadrato e f, ut c a ad a b, ita est quadratum f e ad quadratum a b.] *Cum enim rectangulum c a b quadrato e f sit æquale, erit ut c a ad e f, ita e f ad a b. quare ut c a ad a b, ita quadratum c a ad quadratum e f, hoc est quadratum e f ad a b quadratum.* B 14.sexti cor.20. sexti

Transibit utique sectio per a, quoniam ut rectangulum f d e ad quadratum d a, ita est e f ad f g.] *Ex uigesima prima propositione huius.* C

Quare a c rectum est figuræ latus.] *Ex eadem uigesima prima.* D

Et linea d a sectionem continget, propterea quod rectangulum d e f æquale est quadrato e h.] *Ex ijs, quæ nos demonstrauimus in trigesimam octauam propositionem huius libri.* F

Quando autem hoc ita sit, linea a c rectum est figuræ latus.] *Ex quinquagesima propositione huius.* G

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO LV.

Datis duabus rectis lineis terminatis, atque ad rectos inter se angulos; inuenire oppositas sectiones, quarum diameter sit una datarum linearum; & uertices lineæ termini: applicatæ uero ab utraque sectione in dato angulo possint spatia adiacentia alteri lineæ, excedentiaq; figura simili ei, quæ datis lineis continetur.

Sint datæ rectæ lineæ terminatæ ad rectos inter se angulos b e, b h: & datus angulus sit g. oportet utique circa unam linearum b e, b h sectiones oppositas describere; ita ut ductæ à sectione lineæ in angulo g applicentur. Datis igitur duabus rectis lineis b e, b h describatur hyperbole a b c, cuius diameter transuersa sit b e; & rectum figuræ latus h b: ductæ uero ad lineam, quæ indirectum ipsi b e constituitur, applicentur in angulo g; quod quomodo fieri oporteat, iam dictum est. Ducatur per e linea e k ad rectos angulos ipsi b e, quæ sit æqualis b h: & describatur similiter alia hyperbole d e f; ita ut eius diameter sit b e, rectum figuræ latus e k; & ductæ à sectione ordinatim applicentur in angulo, qui deinceps est ipsi g. constat igitur b e sectiones esse oppositas, quarum diameter est una: duo uero recta latera inter se æqualia.

PROBLEMA V. PROPOSITIO LVI.

DATIS duabus rectis lineis, se se bifariam secantibus, circa utramque ipsarum sectiones oppositas describere, ita ut rectæ lineæ sint coniugatæ diametri: & quarumlibet oppositarum sectionum diameter possit figuram aliarum oppositarum.

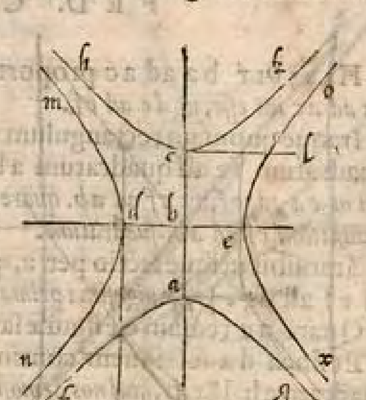
Sint datæ rectæ lineæ bifariam se inuicem secantes a c, d e. oportet iam circa utramque ipsarum diametrum oppositas sectiones describere, ita ut a c, d e coniugatæ sint in ipsis: & d e quidem possit figuram earum, quæ circa a c sunt: a c uero figuram earum possit, quæ circa d e. Sit quadrato d e æquale rectangulum a c l: sitq; l c ipsi c a ad rectos angulos: & duabus datis rectis lineis, ad rectos inter se angulos constitutis, a c, c l describantur oppositæ sectiones f a g, h c k, quarum diameter transuersa sit c a, & rectum latus c l: ductæ autem à sectionibus ad c a in dato angulo applicentur. erit ipsa d e secunda diameter oppositarum sectionum, quod mediam proportionem habeat inter latera figuræ: & ordinatim applicatæ æquidistans ad b bifariam secetur. Sit rursus quadrato a c æquale rectangulum e d r: & sit r d ad rectos angulos ipsi d e. itaque datis duabus rectis lineis, ad rectos inter se angulos, e d, d r, sectiones oppositæ, m d n, o e x describantur, quarum transuersa diameter d e, & d r rectum figuræ latus: ductæ uero à sectionibus applicentur ad d e in dato angulo, linea a c secunda diameter erit sectionum m d n, o e x. ergo a c lineas ipsi d e æquidistantes inter sectiones f a g, h c k bifariam secat; d e uero æquidistantes ipsi a c, quod facere oportebat. uocentur autem huiusmodi sectiones coniugatæ.

a c l

55. huius

diff. sec. diamet.

Sectiones coniugatae quae sint.



EVTOCIVS.

SCRIPSIMVS *in commentarijs in decimum theorema, quod nam fuerit propositum Apollonio in primis tresdecim theorematibus: & in Commentarijs in sextum decimum de tribus sequentibus dictum est. At uero in septimo decimo asserit Apollonius rectam lineam, quæ per uerticem ducitur, ordinatim applicatæ æquidistans, extra sectionem cadere. In decimo octauo lineam, quæ utcunque contingenti æquidistans intra sectionem ducitur, ipsam secare. In decimo nono lineam,*

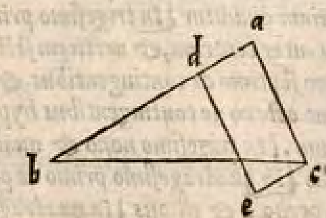
neam, quæ ducitur ab aliquo puncto diametri, ordinatim applicatæ æquidistans, cum sectione conuenire. In uigesimo, & uigesimo primo lineas in sectionibus ordinatim applicatas inquirit, quomodo inter se se habeant: itemq; diametri portiones, quæ ab ipsis fiunt. In uigesimo secundo, & uigesimo tertio tractat de linea, quæ in duobus punctis sectioni occurrit. In uigesimo quarto, & uigesimo quinto de ea, quæ ipsi occurrit in uno puncto tantum, hoc est de linea, quæ sectionem contingit. In uigesimo sexto de ea, quæ diametro parabolæ, & hyperbolæ æquidistans ducitur. In uigesimo septimo de linea secante parabolæ diametrum, quippe quæ ex utraque parte sectioni occurrat. In uigesimo octauo de ea, quæ æquidistans ducitur contingenti unam oppositarum sectionum. In uigesimo nono de ea, quæ per centrum oppositarum sectionum transiens producitur. In trigesimo de linea transeunte per centrum ellipsis, & oppositarum sectionum, quæ producta à centro bifariam diuiditur. In trigesimo primo de linea hyperbolen contingente, quæ quidem diametrum secat inter centrum, & uerticem sectionis. In 32.33.34.35.36. de lineis contingentibus agitur. In trigesimo septimo de contingentibus, & de ijs, quæ à tactu applicantur in hyperbola & ellipsi. In trigesimo octauo de contingentibus hyperbolen, & ellipsim, quo pacto se habeant ad secundam diametrum. In trigesimo nono & quadragesimo de ijsdem agit, compositas ex his proportiones inquirens. In quadragesimo primo de parallelogrammis descriptis ab applicata, & ea, quæ ex centro hyperbolæ & ellipsis. In quadragesimo secundo asserit triangulum in parabola ex contingente, & applicata factum æquale esse ei parallelogrammo, quod cum æqualem altitudinem habeat, in dimidia basi constituitur. In quadragesimo tertio inquirit in hyperbola & ellipsi, quomodo se habeant inter se se triangula, quæ à contingentibus & applicatis fiunt. In quadragesimo quarto idem inquirit in oppositis sectionibus. In quadragesimo quinto itidem in secunda diametro hyperbolæ & ellipsis. In quadragesimo sexto de alijs parabolæ diametris, quæ sunt post diametrum principalem. In quadragesimo septimo de alijs diametris hyperbolæ & ellipsis. In quadragesimo octauo de alijs diametris oppositarum sectionum. In quadragesimo nono de lineis, iuxta quas possunt applicatæ ad alias parabolæ diametros. In quinquagesimo de ijsdem in hyperbola, & ellipsi. In quinquagesimo primo de ijsdem in oppositis sectionibus. Itaque cum hæc scripsisset, addidissetq; epilogum quendam in quinquagesimo secundo problema illud ostendit; quomodo parabole in plano describatur. In quinquagesimo tertio quomodo describatur hyperbole. In quinquagesimo quarto, quomodo ellipsis. In quinquagesimo quinto, quomodo oppositæ sectiones. In quinquagesimo sexto, quomodo describantur oppositæ sectiones illæ, quas coniugatas appellamus.

PRIMI LIBRI FINIS.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA IN SECVNDVM LIBRVM CONICORVM APOLLONII.

LEMMA PRIMVM.

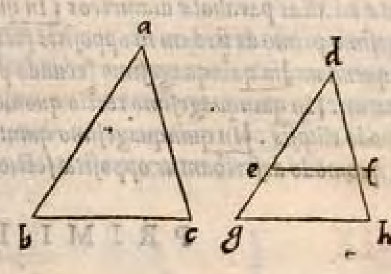
DATIS duabus rectis lineis a b, b c, & data recta d e; in ipsas a b, b c coaptare lineam, ipsi d e æqualem, & æquidistantem.



Hoc autem manifestum est. nam si per e ducatur e c æquidistans a b;& per c ipsi d e æqui distans ducatur c a, erit a c e d
31. primi parallelogrammum: & propterea a c ipsi d e & æqualis, & æquidistans; quæ quidem in datas rectas lineas a b, b c coaptata erit.

LEMMA II.

Sint duo triangula a b c, d e f: sitq; ut a b ad b c, ita d e ad e f: & a b quidem sit æquidistans d e; b c uero ipsi e f. Dico & a c ipsi d f æquidistantem esse.

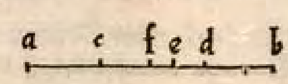


Producatur enim b c;& conueniat cum d e,
29. primi. d f in punctis g h. est igitur angulus e æqualis angulo g, hoc est ipsi b; propterea quod duæ lineæ a b, b c duabus d e, e f æquidistant. Itaque quoniam ut a b ad b c, ita est d e ad e f: & an-
6. sexti. guli ad b e sunt æquales; erit angulus c æqua-
28. primi lis angulo f, hoc est angulo h. ergo linea a c ipsi d h est æquidistans.

LEMMA III.

Sit recta linea a b; sintq; æquales a c, d b: & inter c d sumatur quodvis punctum e. Dico rectangulum a d b unà cum rectangulo c e d æquale esse rectangulo a e b.

5. secũdi. Secetur enim c d bifariam in f, quomodocunque se habeat ad e punctum. & quoniam rectangulum a d b una cum quadrato f d æquale est quadrato f b: quadrato autem f d rectangulum c e d unà cum quadrato f e est æquale: & quadrato f b æquale rectangulum a e b unà cum quadrato f e: erit rectangulum a d b unà cum rectangulo c e d, & quadrato f e æquale rectangulo a e b & quadrato f e. commune auferatur quadratum f e. reliquum igitur a d b rectangulum unà cum rectangulo c e d æquale est rectangulo a e b.



LEMMA IIII.

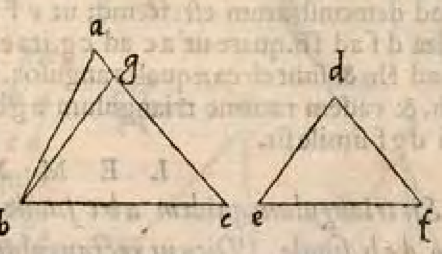
Sit recta linea a b: & æquales sint a c, d b; & inter c d quodvis punctum e sumatur. Dico rectangulum a e b æquale esse rectangulo c e d, & rectangulo d a c.

Secetur

Secetur enim c d in f bifariam, quomodocumque se habeat ad punctum e. quare tota a f ipsi f b est æqualis. rectangulum igitur a e b unà cum quadrato e f æquale est quadrato a f. Sed rectangulum d a c unà cum c f quadrato quadrato a f est æquale. ergo rectangulum a e b unà cum quadrato e f æquale est rectangulo d a c, & c f quadrato. quadratum autem c f est æquale rectangulo c e d, & quadrato e f. quare sublato communi, nempe quadrato e f, erit quod relinquitur rectangulum a e b æquale rectãgulo c e d, & rectangulo d a c. A 5 secundi 6.

LEMMA V.

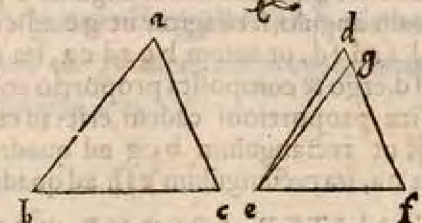
Sint duo triangula a b c, d e f: & sit angulus quidem c æqualis angulo f. angulus uero b angulo e maior. Dico lineam b c ad c a minorem proportionem habere, quàm e f ad f d.



Constituatur enim angulus c b g æqualis angulo e: & est angulus c angulo f æqualis. ergo ut b c ad c g, ita e f ad f d. 4. sexti. Sed b c ad c a minorem habet proportionem, quàm b c ad c g. 8. quinti quare & b c ad c a minorem proportionem habebit, quàm e f ad f d.

LEMMA VI.

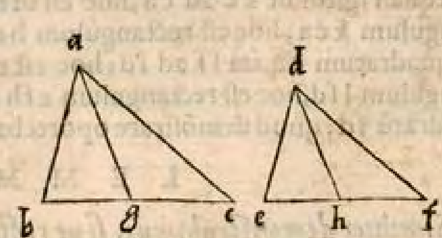
Habeat rursus b c ad c a maiorem proportionem, quàm e f ad f d: & sit angulus c æqualis angulo f. Dico angulum b angulo e minorem esse.



Quoniam enim b c ad c a maiorem proportionem habet, quàm e f ad f d: si fiat ut b c ad c a, ita e f ad aliam quandam: erit ea minor, quàm f d. Itaque sit f g: & e g iungatur. cum igitur circa æquales angulos latera proportionalia sint; angulus b est æqualis angulo f e g: & propterea angulo e minor erit. 6. sexti

LEMMA VII.

Sint triangula similia a b c, d e f: & ducantur a g, d h, ita ut sit rectangulum b c g ad quadratum c a, sicut rectangulum e f h ad quadratum f d. Dico triangulum a g c triangulo d h f simile esse.

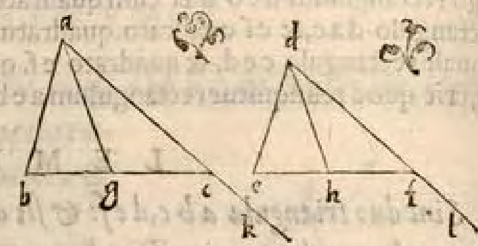


Quoniam enim est ut rectangulum b c g ad quadratum c a, ita rectangulum e f h ad quadratum f d: & proportio rectanguli b c g ad quadratum c a composita est ex proportione b c ad c a, & proportione g c ad c a: 23. sexti proportio autem rectanguli e f h ad quadratum f d componitur ex proportione e f ad f d: & proportione h f ad f d: quarum quidem proportio b c ad c a eadem est, quæ e f ad f d, propter similitudinem triangulorum: erit reliqua g c ad c a eadem, quæ h f ad f d. & sunt circa æquales angulos latera proportionalia. ergo triangulum a c g triangulo d f h 6. sexti simile erit. Hoc igitur ex coniuncta proportione in eum, quem diximus, modum demonstratur. Sed licet & aliter demonstrare absque coniuncta proportione.

14. sexti ALITER. Ponatur enim rectangulo b c g æquale rectangulum a c k. ergo ut b c ad c k, ita a c ad c g. Rursus ponatur rectangulo e f h æquale rectangulum d f l. erit ut e f ad f l, ita d f ad f h. Sed positum est, ut rectangulum b c g, hoc est rectangulum a c k ad quadratum a c, uidelicet ut a c ad c k, ita rectangulum e f h, hoc est d f l ad quadratum d f, uidelicet ut d f ad f l. Vt autem b c ad c a, ita e f ad f d, ob similitudinem triangulorum. ergo ut b c ad c k, ita e f ad f l. Sed ut b c ad c k, ita a c ad c g, quod demonstratum est: itemq; ut e f ad f l, ita d f ad f h. quare ut a c ad c g, ita erit d f ad f h: & sunt circa æquales angulos. triangulum igitur a c g simile est triangulo d f h. & eadem ratione triangulum a g b triangulo d h e, quòd & a b c triangulum ipsi d e f simile sit.

lemm. 22 decimi.

22. quinti

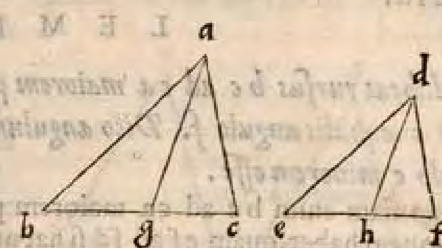


LEMMA VIII.

Sit triangulum quidem a b c simile triangulo d e f: triangulum uero a b g triangulo d e h simile. Dico ut rectangulum b c g ad quadratum c a, ita esse rectangulum e f h ad quadratum f d.

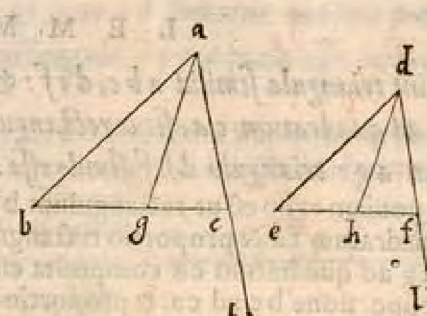
Quoniam enim propter similitudinem triangulorum totus angulus a toti d est æqualis: angulus autem b a g æqualis est angulo e d h: erit reliquus g a c reliquo h d f æqualis. Sed & angulus c est æqualis angulo f. est igitur ut g c ad c a, ita h f ad f d. ut autem b c ad c a, ita e f ad f d. ergo & composita proportio compositæ proportioni eadem erit: idcircoq; ut rectangulum b c g ad quadratum c a, ita rectangulum e f h ad quadratum f d.

4. sexti



ALITER ABSQVE CONIVNCTA PROPORTIONE.

Ponatur rectangulo b c g æquale rectangulum a c k: & rectangulo e f h æquale rectangulum d f l, erit rursus ut b c ad c k, ita a c ad c g. ut autem e f ad f l, ita d f ad f h: & eadem ratione, qua supra demonstrabimus, ut a c ad c g, ita esse d f ad f h. ergo ut b c ad c k, ita e f ad f l. Sed ut b c ad c a, ita e f ad f d, ob triangulorum similitudinem. ex æquali igitur ut k c ad c a, hoc est ut rectangulum k c a, hoc est rectangulum b c g ad quadratum c a, ita l f ad f d; hoc est rectangulum l f d, hoc est rectangulum e f h ad quadratũ f d. quod demõstrare oportebat.

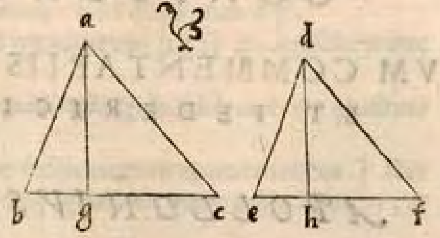


LEMMA IX.

Similiter demonstrabimus, si ut rectangulum b c g ad quadratum a c, ita fuerit rectangulum e f h ad quadratum f d: & triangulum a b c simile triangulo d e f: & triangulum a b g triangulo d e h simile esse.

LEMMA X.

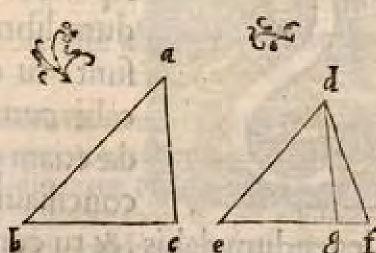
Sint duo triangula similia a b c, d e f: & ducantur perpendiculares a g, d h. Dico ut rectangulum b g c ad quadratum a g, ita esse rectangulum e h f ad quadratum d h.



Hoc autem ex ijs, quæ supra dicta sunt, perspicue constat.

LEMMA XI.

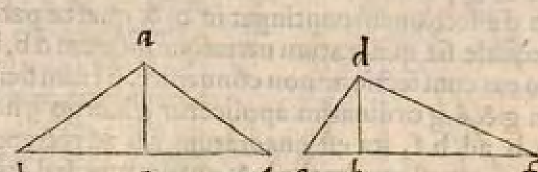
Sit æqualis quidem angulus b angulo e: angulus uero a angulo d minor. Dico c b ad b a minorem proportionẽ habere, quàm f e ad e d.



Quoniam enim angulus a minor est angulo d, constituatur angulo a æqualis angulus e d g. est igitur ut c b ad b a, ita g e ad e d. sed g e ad e d minorem habet proportionem, quàm f e ad e d. ergo & c b ad b a minorem proportionem habebit, quam f e ad e d. similiter & omnia alia eiusmodi ostendemus.

LEMMA XII.

Sit ut rectangulum b g c ad quadratum a g, ita rectangulum e h f ad quadratum d h: & sit b g quidem æqualis g c: c g uero ad g a minorem proportionem habeat, quàm f h ad h d. dico f h maiorem esse ipsa h e.



Quoniam enim quadratum c g ad quadratum g a minorem proportionem habet, quàm quadratum f h ad quadratum h d: quadratum autem c g æquale est rectangulo b g c: habebit b g c rectangulum ad quadratum a g minorem proportionem, quàm quadratum f h ad quadratum h d. sed ut b g c rectangulum ad quadratum a g, ita positum est rectangulum e h f ad quadratum h d. ergo rectangulum e h f ad quadratum h d, minorem proportionem habet, quàm quadratum f h ad quadratum h d. maius igitur est quadratum f h rectangulo e h f. quare & linea f h maior erit linea h e. 8. quinti.

APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIBER II.
CVM COMMENTARIIS EVTOCII ASCALONITAE, ET FEDERICI COMMANDINI.

APOLLONIVS EVDEMO S. D.

SI uales bene est, ego quidem satis commode habeo. Apollonio filio meo dedi, ut ad te perferret secundum librum conicorum, quæ à nobis conscripta sunt. tu eum diligenter percurres: & communicabis cum iis, qui eo tibi digni uidebuntur. Philonidæ etiam geometræ, quo cum tibi Ephesi amicitiam conciliaui, si quando in isthæc Pergami loca uenerit, legendum dabis. & tu cura ut ualeas.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI hyperbolen recta linea ad uerticem contingat: & ab ipso ex utraque parte diametri sumatur æqualis ei, quæ potest quartam figuræ partem: lineæ, quæ à sectionis centro ad sumptos terminos contingentis ducuntur, cum sectione non conuenient.

Quarta pars figuræ est quadratum dimidiæ diametri secundæ coniugatæ. Vel est rectangulum sub ~~semi...~~ et semirecto latere

SIT hyperbole, cuius diameter a b; centrum c; & rectum figuræ latus b f: linea uero d e sectionem contingat in b: & quartæ parti figuræ, quæ continetur lineis a b, b f æquale sit quadratum utriusque ipsarum d b, b e: & iunctæ c d, c e producantur. Dico eas cum sectione non conuenire. si enim fieri potest, conueniat c d cum sectione in g: & à g ordinatim applicetur g h. ergo g h æquidistans est ipsi d b. & quoniam ut a b ad b f, ita est quadratum a b ad rectangulum a b f: quadratum autem c b quarta pars est quadrati a b: & quadratum b d itidem quarta pars rectanguli a b f: erit ut a b ad b f, ita quadratum c b ad b d quadratum; hoc est quadratum c h ad quadratum h g. sed ut a b ad b f, ita est rectangulum a h b ad quadratum h g. quare ut c h quadratum ad quadratum h g, ita rectangulum a h b ad h g quadratum. ex quibus sequitur rectangulum a h b quadrato c h æquale esse: quod est absurdum. ergo c d cum sectione non conuenit. similiter demonstrabitur neque ipsam c e conuenire cum sectione. sunt igitur lineæ c d c e asymptoti, hoc est cum sectione non conuenientes.

lem. in 22 decimi

25. quinti

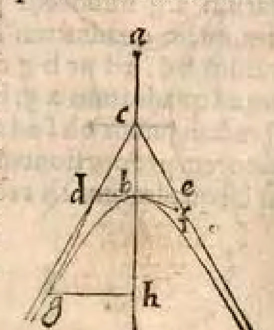
A

21. huius · B

9. quinti

C

D



EVTOCIVS.

EXPLICATVRVS secundum librum conicorum amicissime Anthemi, illud prædicere oportere existimo, me ea tantummodo in ipsum conscribere, quæ ex primo libro intelligi possunt. Primum theorema casum non habet, lineæ enim d c, c e sectionis asymptoti cum sint, eædem manent in omni tum diametro, tum linea contingente.

FED.

FED. COMMANDINVS.

HOC est quadratum ch ad quadratum hg.] *Quoniam enim ponitur lineam cd productam cum sectione conuenire in g: erit ex quarta sexti, ut cb ad bd, ita ch ad hg. quare ex 22. eiusdem, ut quadratum cb ad bd quadratum, ita quadratum ch ad quadratum hg.* A

Sed ut ab ad bf, ita est rectangulum ahb ad quadratum hg.] *Ex uigesima prima primi libri huius.* B

Quod est absurdum.] *Est enim quadratum ch æquale rectangulo ahb unà cum quadrato bc ex sexta secundi libri elementorum.* C

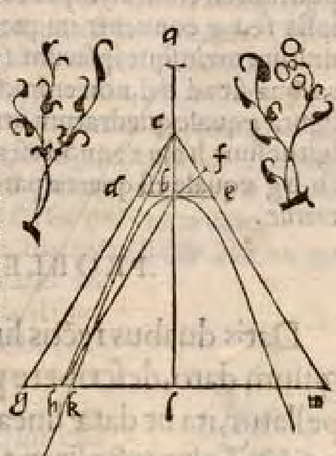
Sunt igitur lineæ cd, ce asymptoti, hoc est cum sectione non conuenientes.] *Has Græci ἀσυμπτώτους τῇ τομῇ uel simpliciter ἀσυμπτώτους appellant. quare nobis deinceps, ut uno uerbo dicamus, græca uoce uti liceat.* D ἀσύμπτωτοι

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Isdem manentibus demonstrandum est non esse alteram asymptoton, quæ angulum dce diuidat.

SI enim fieri potest, sit ch: & per b ipsi cd æquidistãs ducatur bh, quæ cum ch in h puncto conueniat: ipsi uero bh ponatur æqualis dg; & iuncta gh ad klm producatur. Quoniam igitur bh, dg æquales sunt, & æquidistantes; & ipsæ db, gh æquales & æquidistantes sint necesse est. secatur autem ab bifariam in c: & ipsi adiungitur quædam linea bl. ergo rectangulum alb unà cum cb quadrato æquale est quadrato cl. similiter quoniam gm ipsi de æquidistat: atque est db æqualis be; & gl ipsi lm æqualis erit. quòd cum gh sit æqualis db, erit gk ipsa db maior: estq; km maior be, quoniam & ipsa lm. rectangulum igitur mkg maius est rectangulo dbe; hoc est quadrato db. & quoniam ut ab ad bf, ita est quadratum cb ad bd quadratum: ut autem ab ad bf, ita alb rectangulum ad quadratum lk: erit ut quadratum cb ad bd quadratum, ita alb rectangulum ad quadratum lk. sed ut quadratum cb ad quadratum bd, ita quadratum cl ad quadratum lg. ergo ut quadratum cl ad quadratum lg, ita alb rectangulum ad quadratum lk. Itaque cum sit, ut totum quadratum cl ad totum quadratum lg, ita ablatum rectangulum alb ad ablatum quadratum lk: erit reliquũ quadratum cb ad reliquum rectangulum mkg, ut quadratum cl ad quadratum lg; hoc est ut quadratum cb ad bd quadratum. ergo rectangulo mkg æquale est quadratum bd: quod fieri non potest: ostẽsum est enim eo maius. non igitur linea ch asymptotos est, uidelicet cum sectione non conueniens.

33. primi. | 6. secũdi. | A | B | C | D | 21. primi huius. | 11. quinti | 4. & 22. sexti. | E | 9. quinti.



EVTOCIVS.

Hoc theorema casum non habet, si quidem linea bh sectionem omnino in duobus punctis secat. quoniam enim æquidistans est cd, cum ipsa ch conueniet. quare prius cum sectione conueniat necesse est.

FED. COMMANDINVS.

SIMILITER quoniam gm ipsi de æquidistat; atque est db æqualis be: & gl ipsi lm æqualis erit.] *Ex ijs, quæ nos demonstrauimus in commentarijs in sextam propositionem primi libri huius.* A

Erit gk ipsa db maior.] *Nam cum ponatur ch asymptotos, punctum h extra sectionem cadet, uidelicet extra punctum k; & idcirco linea gk maior erit, quàm gh, hoc est quàm db.* B

Estq; km maior be, quoniam & ipsa lm.] *Est enim in triangulo clm, ut cl ad lm, ita* C *c b ad b e: & permutando ut l c ad c b, ita l m ad b e. sed l c maior est c b, ergo & l m maior b e. atque est k m maior l m. multo igitur k m ipsa b e maior erit.*

D Et quoniam ut a b ad b f, ita est quadratum c b ad b d quadratum.] *Ex demonstratis in prima propositione huius libri.*

E Itaque cum sit ut totum quadratum c l ad totum quadratum l g, ita ablatum rectangulum a l b ad ablatum quadratum l κ: erit reliquũ &c.] *Quoniam enim rectangu-*
6.secũdi *lum a l b unà cum quadrato c b æquale est quadrato c l, si à quadrato c l auferatur rectangulum a l b reliquum erit c b quadratum. Rursus quoniam recta linea g m secatur in partes æquales in l,*
5. secũdi. *& in partes inæquales in k; rectangulum m k g unà cum quadrato l k æquale est quadrato l g, ergo si à quadrato l g auferatur l κ quadratum, relinquetur rectangulum m k g. cum igitur sit, ut quadratum c l ad quadratum l g, hoc est ut totum ad totum, ita rectangulum a l b ad quadratum*
19.quinti *l κ, ablatum scilicet ad ablatum; erit reliquum ad reliquum, hoc est quadratum c b ad rectangulum m k g, ut totum ad totum.*

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

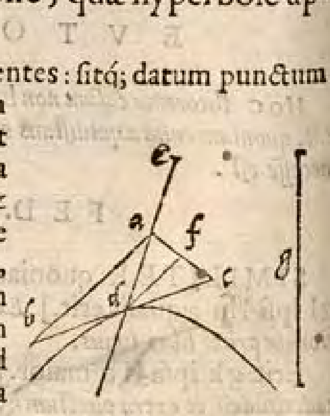
Si hyperbolen contingat recta linea, cum utraque asymptoton conueniet, & ad tactum bifariam secabitur: quadratum uero utriusque eius portionis æquale erit quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum per tactum ductam constituitur.

SIT hyperbole a b c, cuius centrum e: & asymptoti sint f e, e g: quædam uero recta linea h κ sectionem contingat in puncto b. Dico h k productam cũ lineis f e, e g conuenire. si enim fieri potest, non conueniat; & iuncta b e producatur: sitq; ipsi b e
47.primi huius. æqualis e d. diameter igitur est b d. ponatur quartæ parti figuræ, quæ est ad b d æquale quadratum utriusque ipsarum h b, b κ: &
1.huius iungantur h e, e k. ergo h e, e k asymptoti sunt, quod fieri nequit.
2 huius positum est enim asymptotos esse f e, e g. quare h κ producta cũ ipsis f e, e g conuenit. itaque conueniat in punctis f g. Dico quadratum utriusque ipsarum f b, b g æquale esse quartæ parti figuræ, quæ fit ad b d. non enim, sed si fieri potest, sit quartæ parti eius figuræ æquale quadratum utriusque ipsarum h b, b κ. asymptoti igitur sunt h e, e κ; quod est absurdum. ergo quadratum utriusq; f b, b g æquale est quartæ parti figuræ, quæ ad ipsam b d constituitur.

PROBLEMA I. PROPOSITIO IIII.

Datis duabus rectis lineis angulum continentibus, & puncto intra angulum dato, describere per punctum coni sectionẽ, quæ hyperbole appellatur, ita ut datæ lineæ ipsius asymptoti sint.

SINT duæ rectæ lineæ a b, a c angulum ad a continentes: sitq; datum punctum d: & oporteat per d circa asymptotos b a c hyperbolen describere. iungatur a d; & ad e producatur, ita ut d a sit æqualis a e: & per d ipsi a b æquidistans ducatur d f: ponaturq; a f æqualis f c; iuncta uero c d producatur ad b: & quadrato c b æquale fiat rectangulum ex d e, & g. deinde
53. primi huius. producta a d circa ipsam per d hyperbole describatur, ita ut applicatæ ad diametrum possint rectangula adiacentia lineæ g; excedentiaq; figura ipsi d e g simili. Quoniam
2.sexti igitur æquidistans est d f ipsi b a; & c f æqualis f a; erit c d ipsi d b æqualis. ergo quadratum c b quadruplum est quadrati c d. atque est quadratũ c b æquale rectangulo d e g.



Vtrumque

Vtrumque igitur quadratorum b d,d c quarta pars est figuræ,quæ lineis d e g continetur.quare b a,a c descriptæ hyperbolæ asymptoti sunt. 1.huius

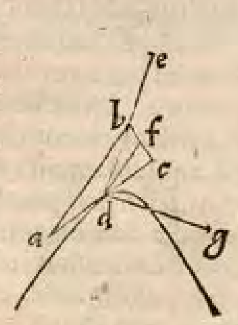
FED. COMMANDINVS.

Hoc problema ab Apollonio conscriptum non est, sed ab alio aliquo additum: quod ex Eutocij uerbis perspicue apparet: is enim in commentarijs in quartam propositionem secundi libri Archimedis de sphæra & cylindro ita scribit. ὡς δὲ δεῖ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου περὶ τὰς δοθείσας ἀσυμπτώτους γράψαι ὑπερβολήν, δείξομεν οὕτως, ἐπειδὴ οὐκ αὐτόθεν κεῖται ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις. *id est, quo autem modo oporteat per datum punctum circa datas asymptotos describere hyperbolé, demonstrabimus in hunc modum, quoniam id per se ipsum in conicis elementis non ponitur. subiungit postea Eutocius demonstrationem eandem, quæ hoc loco habetur, ut credibile sit, uel Eutocium ipsum, uel alium ex Eutocio hoc problema inseruisse. Adde quod Pappus inter lemmata, quæ conscripsit in quintum librum conicorum Apollonij, idem problema per resolutionem, cópositionemq; explicauit, quod minime fecisset, nisi ab ipso Apollonio illud fuisset omissum. sed Pappi lemma apponere libuit.*

Duabus rectis lineis a b, b c positione datis: & dato puncto d; per d circa asymptotos a b, b c hyperbolen describere.

Factum iam sit.ergo b est ipsius centrum:iungatur d b,& producatur,quæ diameter erit: ponaturq; ipsi d b æqualis b e.datum igitur est punctum b. quare & punctũ A B
e dabitur,& diametri terminus:ducatur à puncto d ad lineã b c perpendicularis d f. C D
ergo punctum f datum erit. Rursus ponatur ipsi b f æqualis f c. erit & c datum: & 27.Dat.
iuncta c d producatur ad a,quæ positione data erit.sed & positione data est a b.quare & ipsum a. est autem & c datum. ergo linea a c magnitudine dabitur: atque erit 25 E
a d æqualis d c; propterea quòd b f est æqualis f c. Itaque figuræ,quæ ad diametrum 2. sexti.
e d constituitur, sit d g rectum latus. erit utraque ipsarum a d, d c potestate quarta F
pars rectanguli eius,quod e d g continetur.sed & quarta pars est quadrati a c.rectangulum igitur e d g quadrato a c est æquale.datum autem est a c quadratum. ergo & datum rectangulum e d g:& data est e d.quare ipsa d g,& punctum g datur. Quoniã G
igitur positione datis duabus rectis lineis in plano e d, d g, quæ ad rectos inter se angulos constituuntur;& à dato puncto d facta est sectio hyperbole,cuius diameter quidem est e d,uertex autem d punctum: & à sectione ad diametrum applicatæ in dato angulo a d b applicantur:& possunt spatia adiacentia ipsi d g,latitudinesq; habentia H
lineas ex diametro abscissas,quæ inter ipsas,& punctum d interijciuntur: & excedentia figura simili ei,quæ lineis e d g continetur:erit ipsa sectio positione data.

Componetur autem problema in hunc modum.Sint duæ rectæ lineæ a b, b c positione datæ: & datum punctum d: iunctaq; d b producatur ad e,ut sit b e ipsi d b æqualis: & ducatur perpendicularis d f, ponaturq; ipsi b f æqualis f c; & iuncta c d ad a producatur: atque ipsi e d aptetur ad rectos angulos d g, ita ut quadrato a c æquale sit rectãgulum e d g:& describatur hyperbole circa diametrum d e,ut in resolutione dictum est. Dico iam factum esse quod proponebatur. Quoniam enim b f est æqualis f e,erit & a d ipsi d c æqualis.quare utraque ipsarum a d,d c potestate est quarta pars quadrati a c, hoc est rectanguli e d g, hoc est figuræ,quæ ad diametrum constituitur. demõstratum autem est in secundo libro conicorum lineas a b,b c ipsius hyperbolæ asymptotos esse. K L propos.1



COMMENTARIVS.

Datum igitur est punctum b] *Ex 25. libri Datorum: sunt enim a b, b c positione datæ.* A

Quare & punctum e dabitur] *Ex 27. eiusdem libri.* B

Ducatur à puncto d ad lineam b c perpendicularis d f] *Videtur hic locus corruptus esse: non enim ducenda est d f ad ipsam b c perpendicularis, nisi quando lineæ a b, b c rectum an-* C

M

gulum continent: quippe cum necesse sit lineam d f ipsi a b æquidistare, ut ex proxime dictis apparet. legendum igitur est hoc modo. Ducatur à puncto d ad b c linea d f, quæ ipsi a b æquidistet. & ita legendum erit infra: alioqui non sequeretur a d æqualem esse d c; propterea quòd b f sit æqualis f c.

D Ergo punctum f datum erit] *Ex 25. libri Datorum: nam & linea d f positione datur.*

E Ergo linea a c positione dabitur] *Ex 26. eiusdem.*

F Erit utraque ipsarum a d, d c potestate quarta pars rectanguli eius, quod e d g cõtinetur] *Desideratur in græco codice, τέταρτον, uel δ.*

G Quare ex ipsa d g, & punctum g datur] *Est enim ex 14. uel 17. sexti, ut e d ad a c, ita a c*
2. Datorũ 26 *ad d g: & data est a c. ergo & ipsa d g. estq; datum punctum d. quare & c dabitur.*

H Et possunt spatia adiacentia ipsi d g] *In græco codice mendosè legebatur g a.*

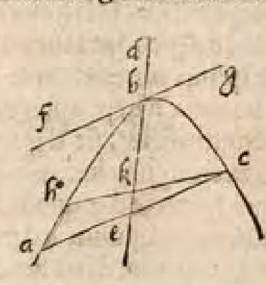
K Et ducatur perpendicularis d f] *Legendum, ut diximus, & ducatur d f ipsi a b æquidistans.*

L Et describatur hyperbole circa diametrum d e] *Ex 53. primi libri huius.*

THEOREMA IIII. PROPOSITIO V.

Si parabolæ, uel hyperbolæ diameter lineam quandam bifariam secet; quæ ad terminum diametri contingit sectionem æquidistans est lineæ bifariam sectæ.

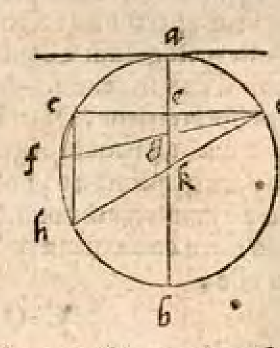
Sit parabole, uel hyperbole a b c, cuius diameter d b e: & linea f b g sectionem contingat. ducatur autem quædam linea a e c in sectione, faciens a e æqualem e c. Dico a c æquidistãtem esse ipsi f g. nisi enim ita sit, ducatur per c ipsi f g æquidistans c h: & iungatur h a. Quoniam igitur parabole, uel hyperbole est
46. primi huius. a b c, cuius diameter quidem d e, contingens autem f g: atque ipsi f g æquidistat c h: erit c k æqualis k h. sed & c e
2. sexti. ipsi e a est æqualis. ergo a h æquidistans est k e; quod fie-
22. primi huius. ri non potest: producta enim cum ipsa b d conuenit.



THEOREMA V. PROPOSITIO VI.

Si ellipsis, uel circuli circumferentiæ diameter lineam quandam nõ per centrum transeuntem bifariam secet; quæ ad terminum diametri contingit sectionem, æquidistans erit bifariam sectæ lineæ.

Sit ellipsis, uel circuli circumferentia, cuius diameter a b: & a b lineam c d non trãseuntem per centrum bifariã secet in e. Dico lineam, quæ ad a sectionem contingit, ipsi c d æquidistantem esse. non enim, sed si fieri potest, sit lineæ ad a contingenti æquidi-
47 primi huius. stans d f. æqualis igitur est d g
2. sexti. ipsi g f. est autem & d e æqualis e c. ergo c f ipsi g e æquidistat, quod est absurdum: si-

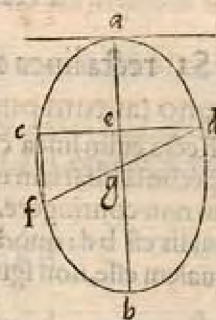


A ue enim punctum g centrum
B sit sectionis a b; linea c f cum diametro a b conueniet, siue non sit, ponatur cẽtrum k iunctaq; d k producatur ad h; & iungatur c h. Quoniam igitur d k æqualis est k h, & d e ipsi e c; erit c h æquidistans a b. sed & c f eidem æquidistat, quod est absurdum. ergo quæ ad a sectionem contingit, ipsi c d est æquidistans.

FED.

FED. COMMANDINVS.

Siue enim punctum g centrum sit sectionis a b, linea c f cum diametro a b conueniet: siue non sit.] *Si linea ad a sectionem contingens non æquidistat ipsi c d, sit lineæ contingenti ad a æquidistans d g f; & iungatur f c. ponatur autem primum g sectionis centrum esse. Itaque d g æqualis est g f: & est d e æqualis e c. ergo f c ipsi g e æquidistat: quod est absurdum: linea enim, quæ transit per centrum, contingenti ad a æquidistans, diameter est ipsi a b coniugata: & propterea f c, quæ ellipsim uel circulum secat inter duas diametros, cum utrisque conueniet ex uigesima tertia primi huius. si uero g non sit centrum sectionis, idem absurdum sequetur: namque f c itidem inter duas diametros secans cum ipsis conueniat necesse est.* A 4.diff. secundarū. B

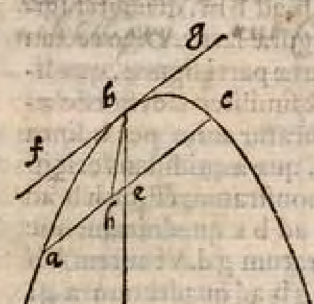


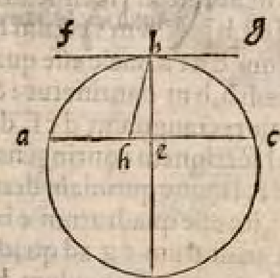
Ponatur centrum k: iunctaq; d k producatur ad h.] *Si d f per centrum non transeat, sit centrum k; & ducta d k h iungatur h c. erit d k æqualis k h. est autem & d e æqualis e c. quare h c æquidistat ipsi a b. sed eidem æquidistat c f: quod est absurdum. Quoniam enim f c cum c h, quæ est æquidistans a b conuenit; & cum ipsa a b necessario conueniet, ex secunda propositione primi libri Vitellionis. Adde quod aliud absurdum sequitur, uidelicet lineas h c, c f uni & eidem a b æquidistantes, etiam inter se se æquidistare, quæ tamen in puncto c conueniunt.* 30. primi huius. 30. primi

THEOREMA VI. PROPOSITIO VII.

Si coni sectionem, uel circuli circumferentiam recta linea contingat: & huic æquidistans ducatur in sectione: & bifariam diuidatur: quæ à tactu ad punctum lineam bifariam diuidens iungitur, sectionis diameter erit.

Sit coni sectio, uel circuli circumferentia a b c, quam contingat recta linea f g: & ipsi f g æquidistās ducatur a c: bifariamq; in e diuidatur: & iungatur b e. Dico b e sectionis esse diametrum. nō enim, sed si fieri potest, sit diameter b h, ergo a h ipsi h c est æqualis, quod est absurdū. est enim a e æqualis e c. non igitur b h diameter erit sectionis. similiter demonstrabimus nullam aliam, præterquam ipsam b e, diametrum esse.





THEOREMA VII. PROPOSITIO VIII.

Si hyperbolæ recta linea occurrat in duobus punctis, producta ex utraque parte cū asymptotis conueniet: & lineæ, quæ ex ipsa abscissæ inter sectionem, & asymptotos interiiciuntur, æquales erunt.

Sit hyperbole a b c, cuius asymptoti sint e d, d f, & ipsi a b c occurrat quædam recta linea a c. Dico a c productam ex utraque parte cum asymptotis conuenire. secetur enim a c bifariam in g: & iungatur d g. diameter igitur est sectionis. quare linea ad b contingens ipsi a c æquidistat. sit autem contin- 7. huius 5. huius

3. huius / 2. primi Vitell. / 6. primi huius.

gens h b k, quæ conueniet cum ipsis e d, d f. Quoniam igitur a c æquidistat k h: & k h conuenit cum k d, d h; & a c cum e d, d f conueniet. Itaque conueniat in punctis e f. est autem h b æqualis b k. ergo f g ipsi g e: & propterea f c ipsi a e, æqualis erit.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO IX.

Si recta linea asymptotis occurrens ab hyperbola bifariam secetur; in uno tantum puncto sectionem contingit.

24

Recta enim linea c d occurrens asymptotis c a, a d secetur ab hyperbola bifariam in puncto e. Dico c d in alio puncto sectionem non contingere. si enim fieri potest, contingat in b. ergo c e (8. huius) æqualis est b d: quod est absurdum; posuimus enim c e ipsi e d æqualem esse. non igitur c d in alio puncto sectionem contingit.

THEOREMA IX. PROPOSITIO X.

Si recta linea sectionem secans cum utraque asymptoton conueniat; rectangulum contentum rectis lineis, quæ inter asymptotos & sectionē interiiciuntur, æquale est quartæ parti figuræ factæ ad diametrum, quæ æquidistantes ipsi ductæ lineæ bifariam diuidit.

A Sit hyperbole a b c, cuius asymptoti d e, e f: & ducatur quædam recta linea d f sectionem, & asymptotos secans: diuidatur autem a c bifariam in g: iunctaq; g e, ponatur ipsi b e æqualis e h: & à puncto b ducatur b m ad angulos rectos ipsi h e b. deinde fiat ut rectangulum h g b ad

+ Conuers. 51. p. h. B a g quadratum, ita linea h b ad b m. diameter igitur est b h: & b m rectum figuræ latus. Dico rectangulum d a f æquale esse quartæ parti figuræ, quæ lineis h b, b m continetur: & similiter eidem esse æquale rectangulum d c f. ducatur enim per b linea

+5. h. C k b l sectionem contingens, quæ æquidistans erit ip

+1. h. D si d f. Itaque quoniam demonstratum est, ut h b ad b m, ita esse quadratum e b ad b k quadratum; hoc

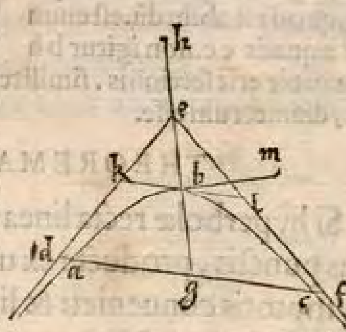
E est quadratum e g ad quadratum g d. Vt autem h b ad b m, ita rectangulum h g b ad quadratum a g:

F erit ut totum quadratum e g ad totum quadratum g d, ita ablatum rectangulum h g b ad ablatum quadratum g a. ergo reliquum quadratum e b ad reliquum rectangulum d a f est, ut quadratum e g ad quadratum g d, hoc est ut quadratum e b ad b k

9. quinti. quadratum. æquale igitur est rectangulum d a f quadrato b k. similiter demonstrabitur & rectangulum

+3. h. G d c f quadrato b l æquale. & est quadratum k b æ-

H quale quadrato b l. ergo & d a f rectangulum rectangulo d c f æquale erit.



FED. COMMANDINVS.

A ET ducatur quædam recta linea d f sectionem, & asymptotos secans.] *Intelligendum est lineam d f sectionem in punctis a c secare.*

B Diameter igitur est b h: & b m rectum figuræ latus.] *Ex uigesima prima primi libri huius, siue eius conuersa.*

Quæ æquidiſtans erit ipſi d f.] *Ex quinta huius.* C

Itaque quoniam demonſtratum eſt, ut h b ad b m, ita quadratum e b ad b k quadratum.] *In prima huius.* D

Vt autem h b ad b m, ita rectangulum h g b ad quadratum a g.] *Ex poſitione.* E

Erit ut totum quadratum e g ad totum quadratum g d.] *Vide quæ ſcripſimus in ſecundam huius.* F

Et eſt quadratum k b æquale quadrato b l.] *Eſt enim linea k b æqualis ipſi b l, ex tertia huius.* G

Ergo & d a f rectangulum rectangulo d c f æquale erit.] *Ex quibus ſequitur illud, quod demonſtrare oportebat, uidelicet unum quodque rectangulorum d a f, d c f æquale eſſe quadrato k b, uel b l, hoc eſt quartæ parti figuræ, quæ lineis h b, b m continetur.* H

3 huius

THEOREMA X. PROPOSITIO XI.

SI utramque linearum continentium angulum, qui deinceps eſt angulo hyperbolen continenti, ſecet recta linea; in uno tantum puncto cum ſectione conueniet: & rectangulum conſtans ex iis, quæ interiiciuntur inter lineas angulum continentes, & ſectionem, æquale erit quartæ parti quadrati ex diametro, quæ ſecanti lineæ æquidiſtans ducitur. A

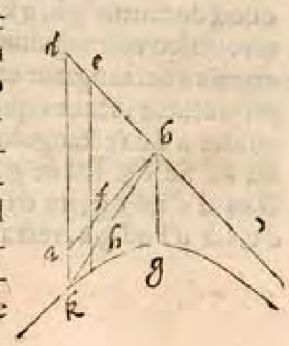
Sit hyperbole, cuius aſymptoti c a, a d: & producta d a ad e, per aliquod punctum e ducatur e f, quæ lineas e a, a c ſecet. perſpicuum eſt e f in uno tantum puncto cum ſectione conuenire. nam quæ per a ipſi e f æquidiſtans ducitur, ut a b, ſecat angulum c a d; proptereaq; conueniet cum ſectione: & ipſius diameter erit. quare e f cum ſectione conuenit in uno tantum puncto. conueniat in g. Dico rectangulum e g f quadrato a b æquale eſſe. ducatur enim per g ordinatim h g l k. ergo quæ in puncto b ſectionem contingit æquidiſtans eſt ipſi h g: ſit autem c d. Itaque quoniam c b eſt æqualis b d; quadratum c b, hoc eſt rectangulum c b d ad b a quadratum proportionem habet compoſitam ex proportione c b ad b a; & ex proportione d b ad b a. ſed ut c b ad b a, ita h g ad g f: & ut d b ad b a, ita k g ad g e. ergo proportio quadrati c b ad quadratum b a compoſita eſt ex proportione h g ad g f, & proportione k g ad g e. proportio autem rectanguli k g h ad rectangulum e g f ex eiſdẽ proportionibus componitur. quare ut rectangulum k g h ad rectangulum e g f, ita quadratum c b ad b a quadratum: & permutando ut rectangulum k g h ad quadratum c b, ita rectangulum e g f ad quadratum a b. ſed demonſtratum eſt rectangulum k g h æquale quadrato c b. ergo & e g f rectangulum quadrato a b æquale erit.

B + 2. h.
C + Coroll. 51. p. h
D + 26. p. h.
E + 51. h.
F + 3. h.
+ 23. ſexti
+ 4. ſexti
+ 23. ſexti
G + 10. h.
+ 14. quinti

26

EVTOCIVS.

IN aliquibus exemplaribus hoc theorema aliter demonſtratur. Sit hyperbole, cuius aſymptoti a b, b c: producaturq; in rectum b e d: & ducatur e f, ut contingit, ſecans lineas b d, b a. Dico e f cum ſectione conuenire. Si enim fieri poteſt, non conueniat: & per b ipſi e f æquidiſtans ducatur b g. ergo b g diameter eſt ſectionis. conſtituatur ad lineam e f parallelogrammum, quadrato b g æquale, excedens figura quadrata, quod ſit e h f: & iuncta b h producatur. conueniet ea cum ſectione. conueniat in k: & per k ducatur k a d æquidiſtans b g. ergo rectangulum d k a quadrato b g eſt æquale. & ideo æquale H K L



27

26 primi huius. rectangulo e h f, quod est absurdum. constat igitur e f cum sectione conuenire, atque in uno tantum puncto, quoniam diametro b g est æquidistans.

FED. COMMANDINVS.

A Si utraque linearum continentium angulum, qui deinceps est angulo hyperbolen continenti.] *Angulum hyperbolen continentem uocat Apollonius eum, quem asymptoti inter se se constituunt: reliquum uero ex duobus rectis, eum qui deinceps est, appellat, qui quidem una asymptoton & altera producta continetur.*

B Proptereaq; conueniet cum sectione.] *Ex secunda huius.*

C Et ipsius diameter erit.] *Ex corollario quinquagesimæ primæ primi huius.*

D Quare e f cum sectione conuenit in uno tantum puncto.] *Ex uigesima sexta primi huius.*

E Ergo quæ in puncto b sectionē contingit, æquidistans est ipsi h g.] *Ex quinta huius.*

F Itaque quoniam c b est æqualis b d.] *Ex tertia huius.*

G Sed demonstratum est rectangulum k g h æquale quadrato c b.] *In decima huius.*

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM QVAM AFFERT EVT.

H Constituatur ad lineam e f parallelogrammum quadrato b g æquale, excedens figura quadrata; quod sit e h f.] *Ex uigesima nona sexti elementorum.*

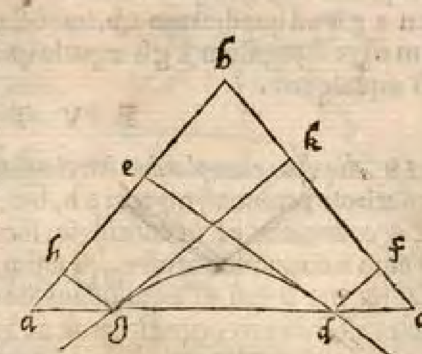
K Conueniet ea cum sectione.] *Ex secunda huius.*

L Ergo rectangulum d k a quadrato b g est æquale.] *Ex ijs, quæ proxime dicta sunt. quare si quis hanc demonstrationem loco præcedentis esse uelit; necesse habebit illud ipsum similiter demonstrare.*

M Quod est absurdum.] *Post hæc uerba in græco codice non nulla desiderantur, qualia fortasse hæc sunt, linea enim d k maior est, quàm e h; & k a maior, quàm h f. Illud uero perspicue apparet. nam ut b k ad k d, ita est b h ad h e: & permutando ut k b ad b h, ita k d ad h e. Rursus ut b k ad k a, ita b h ad h f: permutandoq; ut k b ad b h, ita k a ad h f. Sed est b k maior quàm b h. maior igitur est d k, quàm e h: & k a itidem maior, quàm h f.*

THEOREMA XI. PROPOSITIO XII.

Si ab aliquo puncto eorum, quæ sunt in sectione ad asymptotos duæ rectæ lineæ in quibuslibet angulis ducantur: & ab altero puncto in sectione sumpto ducantur aliæ lineæ his ipsis æquidistantes: rectangulum ex æquidistantibus constans æquale est ei, quod fit ex iis, quibus illæ æquidistantes ductæ fuerant.



Sit hyperbole, cuius asymptoti a b, b c: & sumatur in sectione aliquod punctum d: atque ab eo ad lineas a b, b c ducantur d e, d f. Sumatur autem & alterum punctum g in sectione; per quod ducantur g h, g k ipsis d e, d f æquidistantes. Dico rectangulum e d f rectangulo h g K æquale esse. iungatur enim d g, & ad puncta a c

+. 10. huius producatur. Itaque quoniam æquale est rectangulum a d c rectangulo a g c;

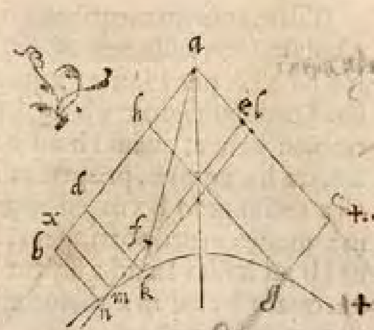
+. 14. sexti. erit, ut g a ad a d,

+. 4 ita d c ad c g. sed ut g a ad a d, ita g h ad d e: & ut d c ad c g, ita d f ad g K. quare ut g h ad

+. 16. sexti d e, ita d f ad g K. rectangulum igitur e d f rectangulo h g K est æquale.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIII.

Si in loco aſymptotis & ſectione terminato, quædam recta linea ducatur, alteri aſymptoton æquidiſtans; in uno puncto tantum cum ſectione conueniet. A



Sit hyperbole, cuius aſymptoti c a, a b: ſumaturq; aliquod punctum e: & per e ipſi a b æquidiſtans ducatur e f. Dico e f cum ſectione conuenire. Si enim fieri poteſt, non conueniat: & ſumatur punctum g in ſectione, per quod ipſis b a, a c æquidiſtantes ducantur g c, g h: & rectangulo c g h æquale ſit rectãgulum a e f; iunctaq; a f, ſi producatur, cum ſectione conueniet. conueniat in puncto K: & per K ducantur K l, K d ipſis b a, a c æquidiſtantes. ergo rectangulum c g h æquale eſt rectangulo l K d. ponitur autem & rectangulo a e f æquale. rectangulum igitur d K l, hoc eſt a l k rectangulo a e f æquale erit: quod fieri non poteſt, ſi quidem k l maior eſt, quam e f; & l a maior, quàm a e. quare e f conueniet cum ſectione. conueniat in m. Dico eam in alio puncto non conuenire. nam ſi fieri poteſt, conueniat etiam in n; & per m n ipſi c a æquidiſtantes ducantur m x, n b. ergo rectangulum e m x rectangulo e n b eſt æquale: quod eſt abſurdum. non igitur in alio puncto cum ſectione conueniet.

8. huius

12. huius

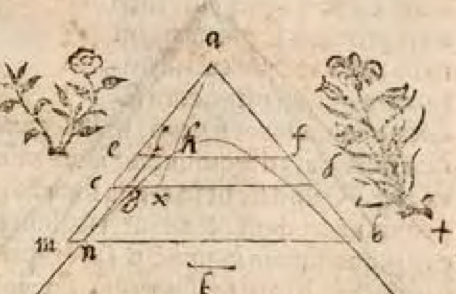
FED. COMMANDINVS.

Si in loco aſymptotis & ſectione terminato, quædam recta linea ducatur.] *Locum intelligit extra ſectionem, qui aſymptotis & ſectione ipſa circumſcribitur.* A

Ergo rectangulum c g h æquale eſt rectãngulo l k d.] *Ex præmiſſa.* B

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIIII.

Asymptoti, & ſectio in infinitum productæ ad ſe ipſas propius accedunt: & ad interuallum perueniunt minus quolibet dato interuallo.



Sit hyperbole, cuius aſymptoti a b, a c: & datum interuallum ſit k. Dico aſymptotos a b, a c & ſectionem productas ad ſe ſe propius accedere. & peruenire ad interuallum minus interuallo k. Ducantur enim lineæ contingenti æquidiſtantes e h f, c g d: iungaturq; a h; & ad x producatur. Quoniam ergo rectangulum c g d rectangulo f h e eſt æquale; erit ut d g ad f h, ita h e ad c g. ſed d g maior eſt f h. ergo & e h ipſa c g eſt maior. ſimiliter demonſtrabimus eas, quæ deinceps ſequuntur, minores eſſe. Itaque ſumatur interuallum e l minus interuallo k: & per l ipſi a c æquidiſtans ducatur l n. ergo l n cum ſectione conueniet. conueniat in n: perq; n ducatur m n b æquidiſtans e f. quare m n eſt æqualis e l: & propterea interuallo K maior erit.

10. huius

14. ſexti

14. quinti

13. huius

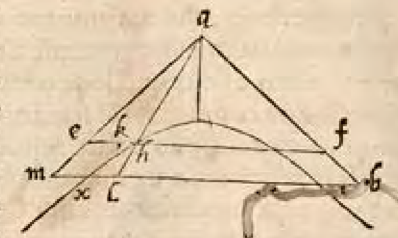
34. primi

Ex hoc manifeſtum eſt, lineas a b, a c ad ſectionem accedere propius, quàm omnes aliæ aſymptoti: & angulum b a c minorem eſſe quolibet angulo, qui aliis eiuſmodi lineis continetur. C D

EVTOCIVS.

In *aliquibus exemplaribus illud aliter demonstratum inuenitur.*

Asymptotos & sectionem peruenire ad interuallum minus quolibet interuallo dato.



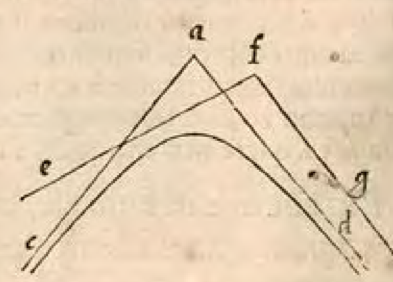
Iisdem enim manentibus, sumatur interuallum
e k dato interuallo minus: fiatq; ut x e ad e h, ita
h a ad a l: & per l ipsi e f æquidistans ducatur m x
8. quinti l b. Quoniam igitur x b ad h f maiorem propor-
14. sexti tionem habet, quàm l b ad h f. Vt autem x b ad
h f, ita h e ad m x, propterea quod rectangulum
10. huius f h e rectangulo b x m est æquale: habebit h e ad
m x maiorem proportionem, quàm l b ad h f. sed
4. sexti ut l b ad h f, ita l a ad a h: & ut l a ad a h, ita h e ad
8. quinti e k: quare h e ad m x maiorem proportionem habet, quàm h e ad e K. minor igitur
est m x, quàm e K.

Inueniuntur in aliquibus codicibus etiam hæc theoremata, quæ à nobis tanquam superuacanea
14. huius *sublata sunt. Quoniam enim demonstratum est, asymptotos propius accedere ad sectionem, & ad interuallum peruenire, quolibet dato interuallo minus; superuacuum fuit hæc inquirere: quod neque demonstrationes aliquas habent, sed dumtaxat figurarum differentias. uerum ut ijs, qui in hæc inciderint, sententiam nostram aperiamus, exponantur hoc loco ea, quæ nos, ut superuacanea sustulimus.*

Asymptoti, de quibus dictum est, propius accedunt ad sectionem, quàm aliæ, si quæ sint asymptoti.

Sit hyperbole, cuius asymptoti c a, a d. Dico c a a d ad sectionem accedere pro-
pius, quàm aliæ asymptoti,

si quæ sint. Namque ut in
prima figura, lineas e f, f g
asymptotos esse non posse,
manifeste constat quòd linea
e f æquidistans sit c a; & f g
13 huius ipsi a d: demonstratum siqui
dem est eas; quæ in loco
asymptotis & sectione termi
nato ducuntur, alteri asym-
ptoto æquidistantes, cum se-
ctione conuenire: si uero, ut in secunda figura apparet, e f, f g sint asymptoti, quippe quæ ipsis c a, a d æquidistant, tamen c a a d ad sectionem propius accedunt, quam e f, f g. Quòd si, ut in tertia figura, c a, a d in infinitum producantur, ad sectionem propius accedunt, & ad interuallum perueniunt minus quolibet dato interuallo. sed e f, f g, quanquam in puncto f, & intra angulum propinquiores sint sectioni, tamen productæ ab ipsa magis recedunt: interuallum enim, quo nunc distant, est quolibet alio interuallo minus. Rursus sint asymptoti e f, f g, ut in quarta figura, constat etiam hoc modo c a propinquiorem esse sectioni, quàm e f, siue e f æqui distans sit c a, siue cum ipsa conueniat. & si quidem punctum, in quo conuenit cum a c, sit infra eam, quæ per f sectionem contingit, secabit e f sectionem ipsam; si uero sit in loco intermedio inter contingentem & angulum, non perueniet

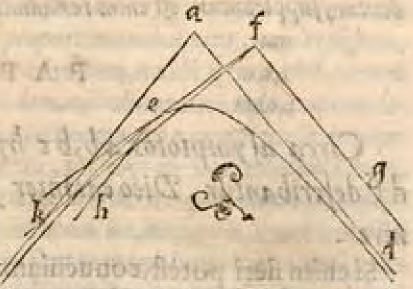


ad interuallum minus dato interuallo. quare c a propinquior est sectioni, quàm e f:

& a d

& a d propinquior, quàm f g, per eadem, quæ diximus in tertia figura.

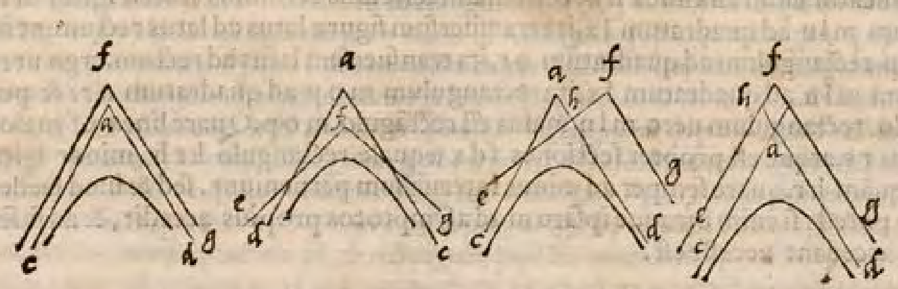
At uero lineam, quæ conuenit cum a c, infra eam, quæ per f ducta sectionem contingit, cum sectione ipsa conuenire, sic demõstrabitur.



Contingat f e sectionem in e: & punctum, in quo e f cum c a conuenit, sit supra f k. Dico f k conuenire cum sectione. ducatur enim per tactũ e ipsi c a asymptoto æquidistans e h. ergo e h sectionem in puncto e tantum secat. Itaque quoniam a c ipsi e h est æquidistans: & f k conuenit cum a c; & cum e h conueniat necesse est. quare & cum ipsa sectione. 13. huius

SI est alter angulus rectilineus, qui hyperbolen contineat, non est minor angulo hyperbolen continente, de quo ante dictum est.

Sit hyperbole, cuius asymptoti c a, a d: aliæ uero asymptoti sint e f, f g. Dico angulum ad f non minorem esse angulo ad a. sint enim primum e f, f g ipsis c a, a d æquidistantes. ergo angulus ad f non est minor eo, qui ad a: si uero non sint æquidistan-



tes, ut in secunda figura, constat maiorem esse angulum ad f angulo c a d. Sed in tertia figura angulus f h a, eo qui ad a maior est; & qui ad f æqualis est angulo f h a. Denique in quarta figura angulus, qui ad uerticẽ, maior est angulo, qui itidem ad uerticem constituitur. non igitur angulus ad f angulo, qui ad a, minor erit.

FED. COMMANDINVS.

Quoniam ergo rectangulum c g d rectangulo f h e est æquale.] *Ex decima huius: utrumque enim est æquale quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum consistit.* A

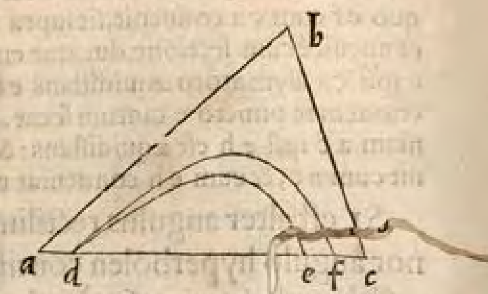
Ergo l n cum sectione conueniet.] *Ex decima tertia huius.* B

Ex hoc manifestum est lineas a b, a c ad sectionem accedere propius, quàm omnes aliæ asymptoti.] *Hoc demonstrauit Eutocius in commentarijs. asymptotos autem uocat etiam alias lineas, quæ cum sectione non conueniunt.* C

Et angulum b a c minorem esse quolibet angulo, qui alijs eiusmodi lineis continetur.] *Non consentit hoc cum ijs, quæ tradit Eutocius: ostendit enim angulum, qui alijs eiusmodi lineis continetur, non esse minorem angulo b a c. quare uel locus corrigendus est, uel intellige punctũ, in quo aliæ asymptoti conueniunt idem esse, quod a, uel in ipsis asymptotis, uel etiam intra ipsas cõtineri: ita enim fiet, ut angulus b a c quolibet alio eiusmodi angulo sit minor. Illud autem, quod hoc loco demonstratur accidere asymptotis & sectioni, ut scilicet in infinitum productæ nõ coeant, sed ad seipsas propius accedant, & ad interuallum perueniant quolibet dato interuallo minus, accidit etiam duabus hyperbolis, quæ circa easdem asymptotos describuntur, quod Pappus demõstrare aggressus est in lemmatibus in quintum librum conicorum Apollonij. sed quoniam ea demonstratio ob temporum iniurias & deprauata est, & manca; non inutile erit uerba ipsius latine reddita in* D *medium afferre, ut quæ perobscura sunt explicemus; quæ uero ad demonstrationem desiderari uidentur, suppleamus. est enim res admirabilis, & diligenti contemplatione dignissima.*

PAPPI LEMMA.

Circa asymptotos a b, b c hyperbolæ d e, d f describantur. Dico eas inter se non conuenire.



Si enim fieri potest, conueniant ad punctum d: & per d in sectiones ducatur recta linea a d e f c. erit propter d f sectionem linea a d æqualis f c: & propter sectionem d e erit a d æqualis e c. quare f c ipsi c e est æqualis. quod fieri non potest. non igitur sectiones inter se conueniunt.

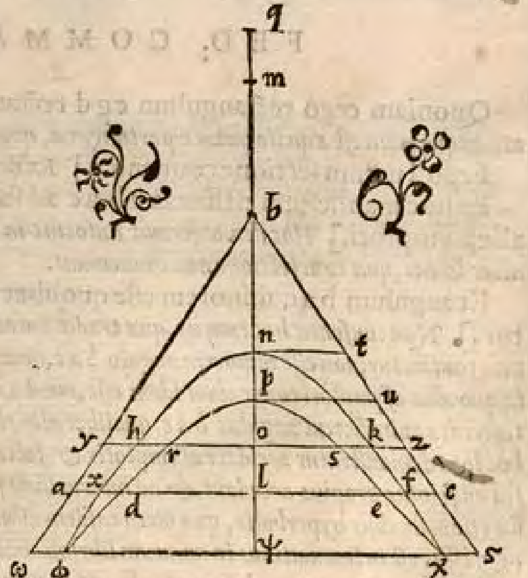
Dico præterea eas, si in infinitum augeantur, ad se se propius accedere, & ad minus interuallum peruenire.

A B C Ducatur enim alia linea h k: & sit diameter, cuius terminus m. erit igitur ut rectā-
D gulum m l n ad quadratum l x, ita transuersum figuræ latus ad latus rectum: ut autem
E m o p rectangulum ad quadratum o r, ita transuersum latus ad rectum. ergo ut rectā- gulum m l n ad quadratum l x, ita rectangulum m o p ad quadratum o r: & permu-
F tando. rectangulum uero m l n maius est rectāgulo m o p. Quare linea x f maior erit
G quàm r s. atque est propter sectiones f d x æquale rectangulo k r h. minor igitur est
H K x d, quàm h r. quare semper ad minus interuallum perueniunt. sed & illud facile constare potest: si enim utraque ipsarum ad asymptotos propius accedit, & ad se se propius accedant necesse est.

COMMENTARIVS.

A Ducatur enim alia linea h k.] *Sint duæ hyperbolæ x n f, d p e circa easdem asymptotos a b, b c descriptæ, ut docetur in quarta propositione huius libri. & intelligantur rectæ lineæ a x d l e f c, h r o s k ad earum diametrum b l ordinatim applicatæ; quæ inter se æquidistabunt: utraque enim æquidistat lineæ in p uel n sectionem contingenti, ex quinta huius.*

B Et sit diameter, cuius terminus m.] *Non potest idem terminus esse diametri utriusque sectionis. producatur enim l p n b diameter in puncta m q, ita ut sit m b æqualis ipsi b n, & b q æqualis b p. erit punctum m terminus diametri sectionis x n f, & q terminus diametri sectionis d p e, quòd b sit utriusque centrum. quare mirum uidetur Pappū uno, eodemq; puncto m uti pro termino utriusque diametri. nisi fortasse intelligamus duo puncta, qui termini sunt, eadem littera notari. quod nouum est, & inusitatum.*



C Erit igitur ut rectangulum m l n ad quadratum l x, ita transuersum figuræ latus ad latus rectum.] *Ex 21. primi libri huius.*

D Vt autem m o p rectāgulum ad quadratum o r, ita transuersum latus ad rectum.] *Hoc est ut rectangulum q o p ad quadratum o r, ita figuræ, quæ fit ad p q diametrum*

*metrum sectionis d p e transuersum latus ad rectum: alia enim sunt huius figuræ latera, atque ea,
de quibus proxime dictum est: quamquam eandem inter se proportionem habeant. nam ut figuræ,
quæ fit ad n m diametrum sectionis x n f transuersum latus ad rectum, ita est figuræ ad diametrũ
p q sectionis d p e transuersum latus ad rectum: quod facile demonstrabitur hoc modo. Ducatur li-
nea n t sectionem x n f contingens in n: & ducatur p u, quæ sectionem d p e contingat in p. æqui
distabunt n t, p u inter sese: utraque enim æquidistat lineæ a c, uel b k: & fient triangula b n t,* 5 huius
b p u similia. ergo ut b n ad n t, ita b p ad p u: & ut quadratum b n ad n t quadratum, ita qua- 4. sexti
dratum b p ad quadratum p u. sed ut quadratum b n ad quadratum n t, ita figuræ, quæ fit ad dia- 22
*metrum n m transuersum latus ad rectum, ex iis, quæ tradita sunt in prima huius: & eadem ratio
ne ut quadratum b p ad quadratum p u, ita figuræ, quæ fit ad diametrum p q transuersum latus ad
rectum. ergo ut figuræ ad diametrum n m transuersum latus ad rectum, ita figuræ ad p q transuer
sum latus ad rectum. ex quibus constat hyperbolas x n f, d p e inter se similes esse, itemq; alias, quæ
cunque circa easdem asymptotos hoc pacto describuntur.*

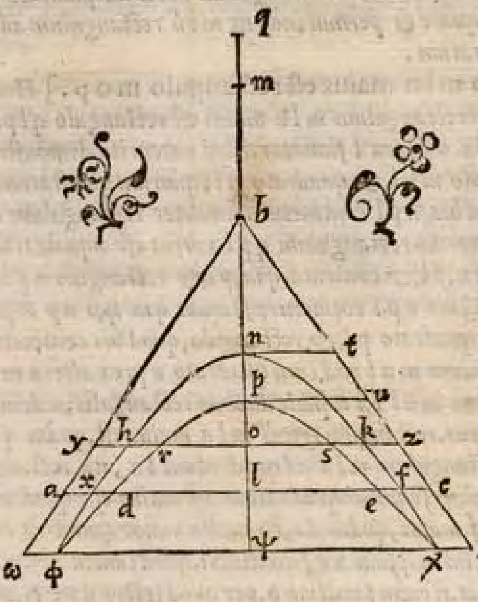
Ergo ut rectangulum m l n ad quadratum l x, ita rectangulum m o p ad quadratũ E
o r.] *Sequitur enim ex iam dictis, ut rectangulum m l n ad quadratum l x, ita esse rectangulum
q o p ad quadratum o r. quare & permutando ut m l n rectangulum ad rectangulum q o p, ita qua
dratum l x ad o x quadratum.*

Rectangulum uero m l n maius est rectangulo m o p.] *Hoc est rectangulum m l n ma* F
*ius rectangulo q o p. nam rectangulum m l n maius est rectangulo q l p. ergo rectangulo q o p mul
to maius erit; quòd punctũ o supra l sumatur. Illud autem ita demonstrabimus. rectangulum enim* 3. secũdi
m l n æquale est rectangulo m n l, & quadrato n l; quorum quadratum n l est æquale duobus qua 4
*dratis n p, p l, & ei, quod bis n p l continetur. similiter rectangulum q l p est æquale rectangulo
q p l, & p l quadrato; quorum rectangulum q p l rursus est æquale tribus rectangulis, rectangulo
scilicet contento lineis m n, p l; & contento q m, p l; & rectangulo n p l: quæ duo postrema rectan-* 1. secũdi.
*gula sunt æqualia ei, quod bis n p l cõtinetur; est enim q m ipsi n p æqualis. Itaque sublatis utrin
que communibus, nempe quadrato p l, & rectangulo, quod bis continetur n p l; relinquitur ex alte
ra quidem parte rectangulum m n l unà cum quadrato n p; ex altera uero rectangulum contentum
m n, & p l. sed rectangulum m n l est æquale duobus rectangulis, uidelicet rectangulo m n p, & ei,* 1. secũdi
*quod m n, & p l continetur. rectangulũ igitur m l n maius est, quàm q l p, quadrato n p, & m n p
rectangulo. Vt autem rectangulum m l n ad quadratum l x, ita rectangulum q l p ad quadratum
l d: & permutando. ex quibus sequitur quadratum x l maius esse quadrato l d. ergo linea x l maior
erit, quàm l d: & tota x f maior, quàm d e, & multo maior quàm r s. Hæc eò spectare uidentur,
ut ostendat sectionẽ d p e intra ipsam x n f contineri. quod tamen absque his ex aliis, quæ in princi
pio dicta sunt, satis constat. si enim punctum p, per quod sectio d p e transit, infra n sumitur; & se
ctiones inter se se conuenire non possint: superuacaneum quodammodo fuit in his tantopere immo-
rari. Sed uereor, ne locus corruptus sit, ut Pappus aliud quoddam potius, quàm hoc ostendere uolue
rit. non enim ex dictis apparet lineam r k minorem esse, quàm d f. quod ad propositum concluden-
dum præmonstrare oportebat.*

Atque est propter sectiones rectangulum f d x æquale rectangulo k r h.] *Hæc nos* G
*ita restituimus: nam græcus codex habet, rectangulum f d x æquale rectangulo s r h: & mendose
ut uidetur: rectangulum enim f d x est æquale rectangulo k r h, ut demonstrabimus: & ideo maius
rectangulo s r h. Producatur h k ex utraque parte adeo, ut secet asymptoton a b in y, & asym-
ptoton b c in z. Quoniam igitur ut y b ad b a, ita y z ad a c, atque est y b minor, quàm b a: erit &* 4. sexti
y z, quàm a c minor. sed ex iis, quæ proxime demonstrata sunt, a d minor est quàm y r: & f c mi- 14. quiti
*nor, quàm k z; asymptoti enim & sectio productæ ad seipsas propius accedunt. quare si ex linea
y z demantur y r, k z; & ex a c demantur a d, f c: relinquitur r k multo minor quàm d f. Itaque
propter sectionem d p e rectangulum y r z æquale est rectangulo a d c; utraque enim sunt æqualia
quadrato p u, ex decima huius: & propter sectionem x n f rectangulum y h z est æquale rectangu
lo a x c; quòd utraque sint æqualia quadrato n t. rectãgulum uero y h z unà cum rectangulo h r k
est æquale rectangulo y r z, & rectangulum a x c unà cum rectangulo x d f æquale rectangulo
a d c; quod idem Pappus demonstrauit in lemmatibus huius libri, lemmate tertio. quare si à rectan
gulo y r z auferatur rectangulum y h z, relinquitur rectangulum h r k: & si à rectangulo a d c
auferatur rectangulum a x c, relinquitur x d f rectangulum: ac propterea rectangulum h r k re-
ctangulo x d f est æquale. Vt igitur r k ad d f, ita est x d ad h r. sed r k minor ostensa est, quàm* 14. sexti

d f. ergo & x d quàm h r minor erit.

H Quare semper ad minus interuallum perueniunt] *Non solum ad minus interuallum perueniunt, sed ad interuallum quolibet dato interuallo minus. producantur enim sectiones unà cum asymptotis, quousque interuallum, quod interijcitur inter asymptotos, & sectionem d p e, sit dato interuallo minus; quod quidem fieri posse ex 14. huius apparet. erit tunc interuallum inter sectiones interiectum multo minus interuallo dato. & quãquam hæ sectiones in infinitum producantur, nunquam tamen inter se conueniunt, ut à Pappo superius est demonstratum: & ex proxime traditis aliter demonstrare possumus in hunc modum. si enim fieri potest, conueniant in φ χ: & ducatur linea φ χ diametrum secans in ψ, quæ primum æquidistet lineis a c, y z, ut sit ad diametrum b ψ ordinatim applicata. Eodem modo, quo supra demonstrabimus rectangulum m ψ n maius esse rectangulo q ψ p: & ut rectangulum m ψ n ad quadratum φ ψ, ita rectangulum q ψ p ad idem φ ψ quadratum: & permutando rectangulum m ψ n ad rectangulum q ψ p, ut quadratum φ ψ ad semetipsum. ergo rectangulum m ψ n æquale est rectangulo q ψ p. sed et maius: quod est absurdum.*



ALITER. Si sectiones conueniant in φ χ, producatur linea φ χ usque ad asymptotos in
10.huius *puncta ω ς. erit rectangulum ω φ ς propter sectionem x n f æquale quadrato n t: & propter sectionem d p e æquale quadrato p u. quare quadratum n t quadrato p u æquale erit. Itaque quoniam ut quadratum n t ad quadratum p u, ita quadratum n b ad quadratum b p; erit & quadratum n b æquale quadrato b p: & ideo linea n b lineæ b p æqualis. quod itidem est absurdum. non igitur hæ sectiones inter se conueniunt. Quòd si linea φ χ non æquidistet lineis a c, y z: diuidatur bifariam in puncto ψ, & iuncta ψ b producatur ad m q: secet autem hyperbolas d p e, x n f in punctis p n: & ab ipsis ducantur p u, n t sectiones contingentes, quæ lineis a c, y z æquidistabunt, ex quinta huius: fiatq; b m æqualis b n, & b q æqualis b p. erit n m sectionis x n f: & p q sectionis d p e diameter transuersa. quare similiter, ut supra, demonstrabimus nullo modo fieri posse, ut hæ sectiones inter se conueniant.*

K Sed & illud facile constare potest, si enim utraque ipsarum ad asymptotos propius accedit, & ad se se propius accedant necesse est.] *Vide quomodo hæc ratio necessitatem habeat: posset enim quis dicere utramque sectionem accedere quidem propius ad asymptotos, sed tamen pari interuallo, ita ut semper inter se se æquidistent.*

THEOREMA XIIII. PROSITIO XV.

Oppositarum sectionum asymptoti communes sunt.

Sint

Sint oppositæ sectiones, quarum diameter a b, & centrum c. Dico sectionum a b asymptotos communes esse. Ducantur enim per puncta a b lineæ d a e, f b g, quæ sectiones contingant. æquidistantes igitur sunt d a e, f b g. Abscindantur lineæ d a, a e, f b, b g, ita ut cuiusque earum quadratum æquale sit quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum a b constituitur. ergo d a, a e, f b, b g inter se sunt æquales. iungantur c d, c e, c f, c g. perspicuum igitur est d c, c g in eadem recta linea contineri; itemq; e c, c f; propterea quòd æquidistantes sunt d a e, f b g. Itaque quoniam hyperbole est, cuius diameter a b; contingens autem d e; & unaquæque linearum d a, a e potest quartam partem figuræ, quæ ad a b constituitur: erunt d c, c e asymptoti. & eadem ratione ipsius b sectionis asymptoti erunt f c, c g. oppositarum igitur sectionum asymptoti communes sunt.

A
B 14. p. h.
C
D 1. h

FED. COMMANDINVS.

A Aequidistantes igitur sunt d a e, f b g.] *Vtraque enim æquidistat lineis, quæ ad diametrum a b ordinatim applicantur.*

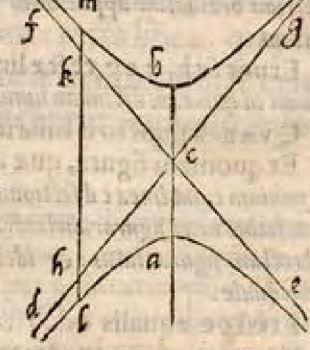
B Ergo d a, a e, f b, b g inter se sunt æquales.] *Ex 14. primi huius. nam transuersum latus a b est utrique commune, & recta figuræ latera inter se æqualia.*

C Perspicuum igitur est d c, c g in eadem recta linea contineri: itemq; e c, c f, propterea quod æquidistantes sunt d a e, f b g.] *Quoniam enim d a e, f b g inter se æquidistant, erit angulus d a c angulo g b c æqualis. linea uero a c est æqualis c b: & d a ipsi g b. quare & basis d c basi c g, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt. angulus igitur a c d est æqualis angulo b c g. sed duo anguli d c a, d c b sunt æquales duobus rectis. itemq; g c b, g c a. quare reliquus ex duobus rectis, angulus d c b est æqualis reliquo a c g. Duo igitur anguli d c a, a c g duobus rectis æquales erunt. & idcirco d c, c g in eadem recta linea continentur. Eodem quoque modo e c, c f in eadem recta linea contineri demonstrabimus.* 29. primi 4 13 14. primi

D Erunt d c, c e asymptoti.] *Ex prima huius.*

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVI.

SI in oppositis sectionibus, quædam recta linea ducatur, secans utramque linearum continentium angulum, qui deinceps est angulo sectiones continenti: cum utraque oppositarum in uno tantum puncto conueniet: & lineæ, quæ ex ipsa abscissæ inter asymptotos, & sectiones interiiciuntur, æquales erunt.



Sint oppositæ sectiones a b, quarum quidem centrum c; asymptoti uero d c g, e c f: & ducatur quædam recta linea h k, quæ utramque d c, c f secet. Dico h k productam cum utraque sectione in uno tantum puncto conuenire. Quoniam enim sectionis a asymptoti sunt d c, c e; & ducta est quædam recta linea h k, secans utramque continentium angulum, qui deinceps est angulo sectionem continenti, uidelicet d c f: producta h k cum sectione a conueniet; & similiter cum sectione b. conueniat in punctis l m: & per c ipsi l m æquidistās ducatur a c b. æquale igitur est rectangulum k l h quadrato a c; & rectangulum h m k quadrato c b. quare & k l h rectangulum æquale est rectangulo h m k: & idcirco linea h l lineæ k m est æqualis.

A 11. h
B
C
D

FED. COMMANDINVS.

A PRODVCTA h k cum sectione a conueniet; & similiter cum sectione b.] *Ex undecima huius.*

B Aequale est igitur rectangulum k l h quadrato a c; & rectangulum h m k quadrato c b.] *Ex eadem.*

C Quare & k l h rectangulum est æquale rectangulo h m k.] *Quoniam enim linea ac lineæ cb est æqualis, quod c sit sectionis centrum; erit & quadratum ac quadrato cb æquale.*

D Et idcirco linea h l lineæ k m est æqualis.] *Illud nos hoc lemmate demonstrabimus.*

40

Sit recta linea ab, in qua sumantur duo puncta c d: sitq; rectangulum d a c æquale rectangulo c b d. Dico lineam ac ipsi b d æqualem esse.

Si enim fieri potest, sit ac maior, quàm b d: & addita utrique communi c d, erit a d maior, quàm c b: & propterea rectangulum d a c maius rectangulo c b d, sed & æquale; quod est absurdum. linea igitur a c ipsi b d est æqualis.

ALITER. *Possumus etiam recta demonstratione uti hoc modo.*

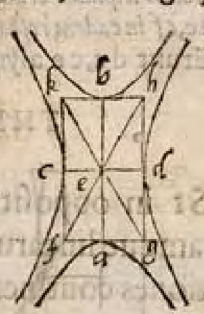
14. sexti *Quoniam enim rectangulum d a c rectangulo c b d est æquale, erit ut a d ad d b, ita b c ad*
9. quinti. *c a: & componendo ut a b ad b d, ita b a ad a c. ergo linea a c ipsi b d æqualis erit.*

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVII.

OPPOSITARVM sectionum, quæ coniugatæ appellantur, asymptoti communes sunt.

Sint oppositæ sectiones, quæ coniugatæ appellantur, quarum diametri coniugatæ a b, c d; & centrum e. Dico earum asymptotos communes esse. ducantur enim lineæ
A sectiones in punctis a, b, c, d, contingentes, quæ sint f a g, g d h, h b k, k c f ergo pa-
B rallelogrammum est f g h k. Itaq; si iungantur f e h, k e g, erunt f e h, k e g rectæ lineæ, & diametri ipsius parallelogrammi,
C D quæ à puncto e bifariam secabuntur. & quoniam figura, quæ ad diametrum a b constituitur, æqualis est quadrato c d: &
E F est c e æqualis e d: unumquodque quadratorũ f a, a g, k b,
G b h erit quarta pars figuræ, quæ constituitur ad a b. ergo f e h, k e g sectionum a b. asymptoti sunt. similiter demonstrabimus sectionum c d easdem esse asymptotos. oppositarũ igitur sectionum, quas coniugatas dicimus, asymptoti communes sunt.

41



FED. COMMANDINVS.

A ERGO parallelogrammum f g h k.] *Aequidistant enim f g, k h lineis, quæ ad a b diametrum ordinatim applicantur: quare & inter sese. & eadem ratione k f, h g inter se æquidistant.*

B Erunt f e h, k e g rectæ lineæ, & diametri ipsius parallelogrammi.] *Hoc demonstrauimus in quintam decimam huius, uidelicet f e h in eadem recta linea contineri, & similiter k e g.*

C QVAE à puncto e bifariam secabuntur.] *Hoc etiam eodem in loco demonstrauimus.*

D Et quoniam figura, quæ ad diametrum a b constituitur, æqualis est quadrato c d.] *Quoniam enim linea c d sectionum a b secunda diameter est, coniugata ipsi a b, mediam proportionem habet inter figurarum latera, ex diffinitione secundæ diametri. quare ut a b ad c d, ita c d*
17. sexti. *ad rectum figuræ latus: & idcirco rectangulum, quod fit ex a b, & latere recto, quadrato c d est æquale.*

E Et est c e æqualis e d.] *Aliter enim non esset secunda diameter.*

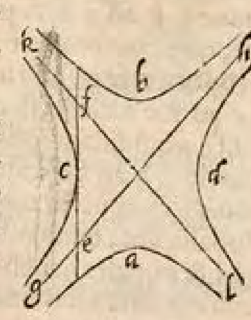
F Vnumquodque quadratorum f a, a g, k b, b h erit quarta pars eius figuræ.] Nã cum

cum c d æquidiſtet fg, k h, & a b ipſis f k, g h; erunt lineæ f a, k b æquales c e; & a g, b h ipſi c d. quare uniuſcuiuſque quadratum quarta pars eſt quadrati c d, hoc eſt figuræ eius, quæ ad a b conſtituitur. 34. primi 20. ſexti

Ergo f e h, K e g ſectionum a b aſymptoti ſunt.] *Ex prima huius.* G

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVIII.

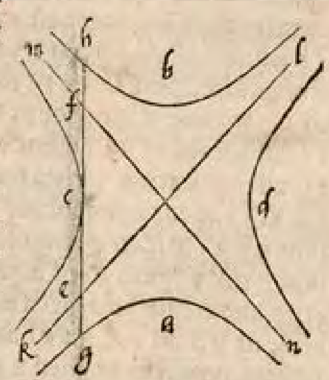
SI uni oppoſitarum ſectionum, quæ coniugatæ dicuntur, occurrat recta linea; & producta ad utraſque partes extra ſectionem cadat: cum utraque ſectionum, quæ deinceps ſunt, in uno tantum puncto conueniet.



Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ dicuntur a b, c, d; & ipſi c occurrat recta linea e f, quæ producta ad utraſque partes extra ſectionem cadat. Dico e f cum utraque ſectione a b conuenire in uno tantum puncto. ſint enim g h, K l ſectionum aſymptoti. ergo e f ſecabit utramque g h, k l: & propterea cum ſectionibus a b in uno tantum puncto conueniet. 3. huius 16. huius

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XIX.

SI in oppoſitis ſectionibus, quæ coniugatæ appellantur, ducatur recta linea, quamuis ipſarum contingens; cum ſectionibus, quæ deinceps ſunt, conueniet: & ad tactum bifariam ſecabitur.



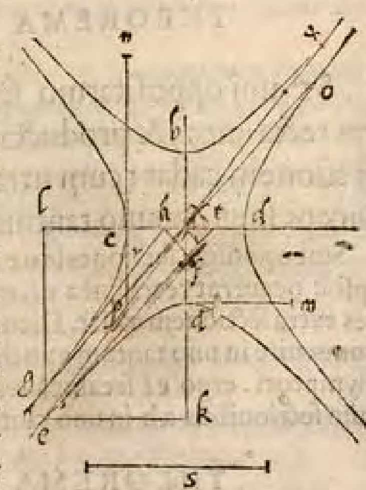
Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ dicuntur a b c d: & ſectionem c contingat recta linea e f. Dico e f productam conuenire cum ſectionibus a b: & ad punctum c bifariam ſecari. Nam ipſam quidem conuenire cum ipſis a b manifeſte patet. Itaque conueniat in punctis g h. Dico c g ipſi c h eſſe æqualem. ducantur enim ſectionum aſymptoti k l, m n. æquales igitur ſunt e g, f h; Itemq; c e, c f. ergo & tota c g toti c h æqualis erit. ex antecedente. 16. huius 3. huius

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XX.

SI unam oppoſitarum ſectionum, quæ coniugatæ appellantur, recta linea contingat; & per ipſarum centrum ducantur duæ lineæ, una quidem per tactum, altera uero contingenti æquidiſtans, quouſque occurrat uni earum ſectionum, quæ deinceps ſunt: recta linea, quæ in occurſu ſectionem contingit, æquidiſtans erit lineæ per tactum, & centrum ductæ; quæ uero per tactus & centrum ducentur, oppoſitarum ſectionum coniugatæ diametri erunt.

Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur, quarum diametri coniugatæ ſint a b, c d; centrum χ: & ſectionem a contingat recta linea e f, quæ producta conueniat cum c χ in t: & iuncta e χ ad x producatur. deinde per χ ducatur ipſi e f æquidiſtans χ g: & per g contingens ſectionem h g. Dico h g ipſi χ e æquidiſtare: & g o e x coniugatas diametros eſſe. applicentur enim ordinatim e k, g l, c r p: lineæ uero, A

B iuxta quas possunt applicatæ, sint a m, c n. Quoniam igitur, ut b a ad a m, ita est n c
C ad c d: & ut b a ad a m, ita rectangulum χ k f ad quadratum k e: ut uero n c ad c d, ita quadratum g l ad rectangulum χ l h: erit ut rectangulum χ k f ad quadratum k e, ita quadratum g l ad rectangulum χ l h. Sed rectangulum χ k f ad k e quadratum proportionem compositam habet ex proportione χ k ad k e, & ex proportione f k ad k e: & quadratum g l ad rectangulum χ l h proportionem habet



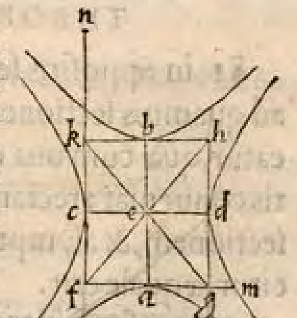
13. sexti compositam ex proportione g l ad l χ & proportione g l ad l h. proportio igitur composita ex proportione χ k ad k e, & proportione f k ad k e eadem est, quæ componitur ex proportione g l ad l χ, &
D proportione g l ad l h. quarum quidem proportio f k ad k e eadem est, quæ g l ad l χ; lineæ enim e k, k f, f e æquidistant ipsis χ l, l g, g χ. reliqua igitur proportio χ k ad k e eadem erit, quæ g l ad l h. Quòd cum circa æquales angulos, qui ad k l, latera proportionalia sint; triangulum e k χ simile erit triangulo
6. sexti g h l, & æquales habebit angulos, sub quibus eiusdem rationis latera subtenduntur. ergo æqualis est angu-
29. primi lus e χ k angulo l g h. est autem & totus k χ g æqualis toti l g χ. quare reliquus e χ g reliquo h g χ est
E æqualis; ac propterea linea e χ ipsi g h æquidistat.
F Itaque fiat ut p g ad g r, ita h g ad lineam, in qua s. erit linea s dimidia eius, iuxta quam possunt, quæ ad diametrum o g applicantur in sectionibus c d. Sed a b sectio-
G num secunda diameter est c d, cum qua conuenit ipsa e t. rectangulum igitur ex t χ & k e æquale est quadrato e χ: si enim à puncto e ipsi k χ æquidistantem duxerimus, rectangulum, quod fit ex t χ, & linea, quæ inter χ & æquidistantem interiicitur, quadra-
H K to e χ æquale erit. quare ut t χ ad k e, ita t χ quadratum ad quadratum χ e. ut autem
L M t χ ad k e, ita t f ad f e; hoc est triangulum t χ f ad triangulum e χ f. & ut quadratum
N t χ ad quadratum χ e, ita triangulum t χ f ad triangulum X e p; hoc est ad triangulum g h X. Vt igitur triangulum t X f ad triangulum e X f, ita t X f triangulum ad triangu-
9. quinti. lum g h X: & ideo triangulum g h X æquale est triangulo X e f. habet autem & angu-
O lum h g X angulo X e f æqualem; quoniam e X quidem æquidistat g h; & e f ipsi g X.
15. sexti ergo latera quæ sunt circa æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent;
16. estq; ut g h ad e X, ita e f ad g X. rectangulũ igitur h g X æquale est rectangulo X e f.
P Itaque quoniam ut linea s ad h g, ita r g ad g p: & ut r g ad g p, ita X e ad e f; æquidistant enim. quare ut s ad h g, ita X e ad e f. Vt autem s ad h g, sumpta X g communi altitudine, ita est rectangulum ex s & X g ad rectangulum h g X. & ut X e ad e f,
lemma 22 decimi ita quadratum X e ad rectangulum X e f. Vt igitur rectangulum ex s & X g ad rectangulum h X g, ita X e quadratum ad rectangulum X e f: & permutando ut rectangulum ex s & g X ad quadratum X e, ita rectangulum h g X ad rectangulum X e f. Sed æquale est rectangulum h g X rectangulo X e f. ergo rectangulũ ex s & g X æquale est quadrato X e: & rectangulum ex s & g X quarta pars est figuræ, quæ ad g o constituitur; nam & g X est dimidia ipsius g o, & s dimidia eius, iuxta quam possunt: quadratum uero e X quarta pars est quadrati e x, quod e X æqualis sit X x. ergo quadratum e x æquale est figuræ ad g o constitutæ. similiter demonstrabimus & quadratum g o figuræ, quæ fit ad e x, esse æquale. ex quibus sequitur, ut e x, g o oppositarum sectionum a b, c d diametri coniugatæ sint.

FED. COMMANDINVS.

A Deinde per χ ducatur ipsi e f æquidistans χ g.] *Intelligendum g X productam sectioni occurrere in o puncto. Apollonius punctum, in quo recta linea sectioni, uel alteri lineæ occurrit σύμπτωσιν uocat, nobis occursum latine liceat appellare.*

Quo-

Quoniam igitur, ut b a ad a m, ita est n c ad c d.] *Hoc ita demonstrabimus. sint oppositæ sectiones, quæ coniugatæ appellantur, quarum diametri coniugatæ a b, c d; centrum e; & asymptoti f h, g k: iunganturq; f a g, g d h, h b χ, k c f: sit autem sectionis a rectum latus a m, & sectionis c rectum latus c n. Dico ut b a ad a m, ita esse n c ad c d. Quoniam enim ut b a ad a m, ita est quadratum e a ad quadratum a f, quod in prima propositione ostensum fuit: & eadem ratione, ut n c ad c d, ita quadratum f c ad quadratum c e. sed ut quadratum e a ad quadratum a f, ita est f c quadratum ad quadratum c e; quòd e a, f c æquales sint; itemq; æquales a f, c e. ergo ut b a ad a m, ita n c ad c d.* B



22. sexti

34. primi

Et ut b a ad a m, ita rectangulum χ k f ad quadratũ κ e.] *Ex 37. primi huius.* C

Quarum quidem proportio f k ad k e eadem est, quæ g l ad l χ; lineæ enim e k, k f, f e ipsis χ l, l g, g χ æquidistant.] *Cum enim g χ æquidistet e f; & l g ipsi k f; erit angulus e f k æqualis angulo g χ k, hoc est angulo χ g l: angulus autem e k f æqualis est ipsi χ l g, quòd & e k æquidistet l χ. reliquus igitur angulus reliquo est æqualis: & triangulum f k e triangulo g l χ simile. quare ut f k ad k e, ita g l ad l χ.* D 29. primi 34

Ac propterea linea e χ ipsi g h est æquidistans.] *Ex 28. primi. sed hoc etiam ex secundo lemmate Pappi constare potest.* E

Erit linea s dimidia eius, iuxta quam possunt, quæ ad diametrum o g applicãtur.] *Ex 51. primi huius.* F

Rectangulum igitur ex $\overset{t}{e}$χ & κ e æquale est quadrato c χ. si enim à puncto e ipsi k χ æquidistantem duxerimus, rectangulum, quod fit ex t χ, & e a, quæ &c.] *Ex 38. primi huius.* G

Quare ut t χ ad k e, ita t χ quadratum ad quadratum χ c.] *Quoniam enim rectangulum ex t χ & k e æquale est quadrato χ c; erunt tres lineæ t χ, χ c, k e proportionales. ergo ut t χ ad k e, ita quadratum t χ ad χ c quadratum, ex corollario 20. sexti.* H

Vt autem t χ ad k e, ita t f ad f c.] *Ex 4. sexti, propter similitudinem triangulorum t f χ, e f k.* K

Hoc est triangulum t χ f ad triangulum e χ f.] *Ex prima sexti.* L

Et ut quadratum t χ ad quadratum χ c, ita triangulum t χ f ad triangulum χ c p] *Rursus cum tres lineæ proportionales sint t χ, χ c, k e; erit triangulum t χ f ad triangulum χ c p, ut t χ ad k e; sunt enim ea triangula inter se similia, quòd p χ æquidistet f t. ut autem t χ ad k e, ita t χ quadratum ad quadratum χ c. triangulum igitur t χ f ad triangulum χ c p, est ut quadratum t χ ad χ c quadratum.* M cor. 20. sexti.

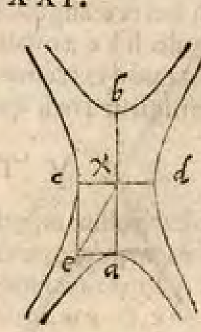
Hoc est ad triangulum g k χ.] *Est enim triangulum g h χ triangulo χ c p æquale, quod probatum est in secunda demonstratione 43. primi huius.* N

Habet autem & angulum h g χ angulo χ e f æqualem, quoniam e χ quidem æquidistat g h, & e f ipsi g χ.] *Angulus enim h g χ est æqualis angulo g χ e, hoc est ipsi χ e f.* O 29. primi

Et ut r g ad g p, ita χ e ad e f, æquidistant enim.] *Ex quarta sexti, nam triangula r g p, χ e f similia sunt, quòd etiam χ f ipsi r p æquidistet.* P

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

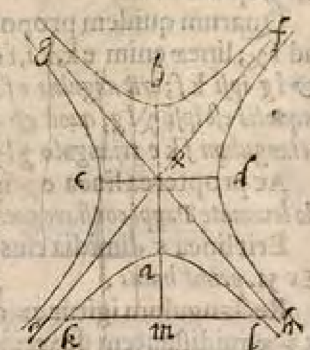
Iisdem positis ostendendum est punctum, in quo contingentes lineæ conueniunt, ad unam asymptoton esse.



Sint oppositæ sectiones, quæ coniugatæ appellantur; & earum diametri a b c d: ducanturq; contingentes a e, e c. Dico punctum e ad asymptoton esse. est enim quadratum c χ æquale quartæ parti figuræ, quæ ad a b constituitur: quadrato autẽ c χ æquale est quadratum a e. ergo quadratum a e quartæ parti dictæ figuræ erit æquale. Itaque iungatur e χ. asymptotos igitur est c χ : & propterea punctum c ad ipsam asymptoton necessario consistit.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXII.

SI in oppositis sectionibus, quæ coniugatæ appellantur, ex centro ad quamuis sectionem ducatur recta linea; & huic æquidistans altera ducatur, quæ cum una ex sectionibus, quæ deinceps sunt, & cum asymptotis conueniat: rectangulum constans ex portionibus lineæ ductæ inter sectionem, & asymptotos interiectis, quadrato lineæ, quæ ex centro ducitur, æquale erit.



47 Sint oppositæ sectiones, quæ cōiugatæ appellantur a b c d; quarum asymptoti e χ f, g χ h: & ex centro χ ducatur quædam recta linea χ c d. & huic æquidistans ducatur e k l h, quæ & sectionem, quæ deinceps est, & asymptotos secet. Dico rectangulum e k h quadrato c χ æquale esse. secetur enim k l bifariã in m; & iuncta m χ producatur. diameter igitur est a b ipsarum a b sectionum. Et quoniã

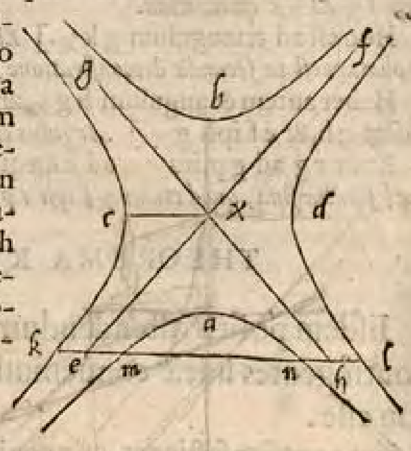
5. huius linea, quæ in puncto a sectionem contingit, æquidistans est ipsi e h: erit e h ad diametrum a b ordinatim applicata. centrum autem est χ. ergo a b, c d coniugatæ sunt dia-

20. huius metri: propterea quadratum c χ æquale est quartæ parti figuræ, quæ ad a b constituitur. sed quartæ parti dictæ fi-

10. huius guræ æquale est rectangulum h κ e. rectangulũ igitur h k e quadrato c χ æquale erit.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIII.

SI in oppositis sectionibus, quæ coniugatæ appellantur, ex centro ducatur quædam recta linea ad quamuis sectionem: & huic æquidistans ducatur, quæ cum tribus, quæ deinceps sunt, sectionibus conueniat: rectangulum constans ex portionibus lineæ ductæ inter tres sectiones interiectis, duplum erit quadrati eius lineæ, quæ ex centro ducitur.



48 Sint oppositæ sectiones, quæ coniugatæ appellantur a b, c d: quarum centrum sit χ: & à puncto χ ad quamuis sectionem ducatur quædam recta linea χ c: atque huic æquidistans sit k l, quæ cum tribus deinceps sectionibus conueniat. Dico rectangulum k m l quadrati c χ duplum esse. ducan-

A tur enim asymptoti sectionum e f, g h. ergo quadratum c χ æquale est utrique rectangulorum h

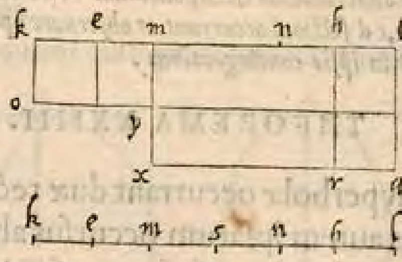
B m e, h k e. rectangulum autem h m e unà cum rectangulo h k e æquale est rectangulo l m k; propterea quòd extremæ lineæ sunt æquales. rectangulum igitur l m k quadrati c χ duplum erit.

EVTOCIVS.

B Rectangulum autem h m e unà cum rectangulo h κ e æquale est rectangulo l m k; propterea quòd extremæ lineæ sunt æquales.] *Sit recta linea l k: & sit l h æqualis e k; & h n ipsi e m: ducantur autem à punctis m κ perpendiculares lineæ m x, k o: ita ut m x sit æqualis m k, & κ o æqualis κ e; & compleantur parallelogramma x h, h a. Itaque quoniam m x æqualis est m k, hoc est p o: & l h æqualis k e, hoc est k o: erit h a parallelogrammum parallelogrammo*

grammo m o æquale. commune apponatur x h. totum igitur parallelogrammum l x æquale est duobus parallelogrammis x h, m o; hoc est h o, p r. est autem parallelogrammum l x, quod continetur l m k: & parallelogrammum h o continetur h k e; & parallelogrammum p r, h m e. sed licet & aliter idem demonstrare.

Secetur m n bifariam in s. constat igitur & l k in s bifariam secari, & rectangulum h k e æquale esse rectangulo l e k, quod h k sit æqualis l e. Et quoniam l k secatur in partes æquales in s, & in partes inæquales in e; erit rectangulum l e k unà cum quadrato e s æquale quadrato s k. quadratum autem e s rectangulo h m e unà cum quadrato s m est æquale. ergo quadratum s k æquale est rectangulo l e k, hoc est h k e, & rectangulo h m e unà cum quadrato s m. eadẽ ratione erit quadratum s k æquale rectangulo l m k, & quadrato s m. quare rectangulum h k e unà cum rectangulo h m e, & quadrato s m æquale est rectangulo l m k, & quadrato s m. commune auferatur quadratum s m. reliquum igitur rectangulum h k e unà cum rectangulo h m e est æquale rectangulo l m k. 5. secũdi.



FED. COMMANDINVS.

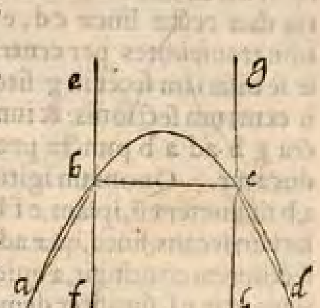
Ergo quadratum c x æquale est utrique rectangulorum h m e, h k e.] *Est enim ex antecedenti propositione rectangulum h m e æquale quadrato c x: & ex undecima huius rectangulum h k e eidem quadrato c x est æquale.* A

Rectangulum autem h m e unà cum rectangulo h k e æquale est rectangulo l m k, propterea quòd extremæ lineæ sunt æquales.] *Hoc apparet ex tertio & quarto lemmate Pappi, quamquam in tertio aliter cõcludat. ostendit enim rectangulum l e k unà cum rectangulo h m e æquale esse rectangulo l m k. sed cum l h, k e sint æquales, rectangulum h k e æquale est ipsi l e k. quare sequitur rectangulum h k e unà cum rectangulo h m e æquale esse rectangulo l m k. Eutocius secundam demonstrationem ex Pappo sumpsit. Nos uero priusquam in lemmata Pappi, uel Eutocij commentarios incideremus, illud ex prima secundi libri elementorum in hunc modum demonstrauimus.* B

Iisdem quæ supra manentibus dico rectangulum h m e unà cum rectangulo h k e æquale esse rectangulo l m k. est enim rectangulum h K e æquale rectangulo m K e, unà cum eo, quod fit ex h m & K e. commune apponatur rectangulum h m e. ergo rectangula h m e, h K e æqualia sunt rectangulis h m e, m K e, unà cum eo, quod fit ex h m, & K e. Rursus rectangulum l m K æquale est rectangulo h m K unà cum eo, quod ex l h, & m K constat, hoc est rectangulo e K m: est enim e K æqualis l h. quorum quidem rectangulum h m K est æquale rectangulo h m e, unà cum eo, quod fit ex h m, & K e. ergo rectangulum l m K æquale est rectangulis h m e, e K m, unà cum eo, quod fit ex h m, K e: quibus quidem æqualia erant rectangula h m e, h K e. rectangulum igitur h m e unà cum rectangulo h K e æquale est rectangulo l m K. 1. secũdi

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIIII.

Si parabolæ duæ rectæ lineæ occurrant, utraque in duobus punctis: & nullius ipsarum occursus alterius occursibus contineatur: conuenient inter se se extra sectionem.



Sit parabole a b c d, cui duæ rectæ lineæ a b, c d occurrant, ita ut nullius ipsarum occursus alterius occursibus contineatur. Dico eas productas inter se conuenire. Ducantur enim per b, c diametri sectionis e b f, g c h. æquidi-cor. 51. 1. huius stantes igitur sunt: & utraque sectionem in uno tantum puncto secat. Itaque iuncta b c anguli e b c, g c b duobus rectis sunt æquales: & idcirco lineæ b a, d c angulos duo 26. 1. hui' bus rectis minores efficiunt. ergo inter se se extra sectionem conuenient.

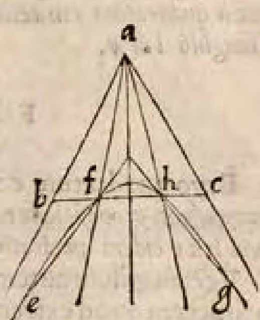
EVTOCIVS.

Animaduertendum est Apollonium συμπτώσεις, *hoc est occursus, appellare puncta, in quibus lineæ a b, c d sectioni occurrunt. et obseruare oportet, ut puncta extra se se posita sint. eadem etiam eueniunt in ipsis contingentibus.*

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXV.

Si hyperbolæ occurrant duæ rectæ lineæ, utraque in duobus punctis; nullius autem ipsarum occursus alterius occursibus contineatur: conueniant quidem inter se se extra sectionem, sed tamen intra angulum, qui hyperbolen continet.

Sit hyperbole, cuius asymptoti a b, a c: & duæ rectæ lineæ e f, g h sectioni occurrant, ita ut nullius ipsarum occursus occursibus alterius contineatur. Dico e f g h productas extra sectionem quidem, sed tamen intra angulum b a c inter se cō uenire. iunctæ enim a f, a h producantur; & iungatur f h. Itaque quoniam e f, g h productæ secant angulos a f h, a h f; & sunt dicti anguli duobus rectis minores, conuenient inter se se extra sectionem quidem, sed tamen intra angulum b a c. similiter demonstrabimus e f, g h inter se conuenire, etiam si sectionem contingant.



FED. COMMANDINVS.

Similiter demonstrabimus e f, g h inter se conuenire, etiam si sectionem contingāt] *Conuenire scilicet intra angulum asymptotis contentum, quod quidem etiam patere potest ex corollario trigesimæ primæ primi huius. linea enim, quæ hyperbolen contingit, si producatur secat diametrum inter uerticem & centrum sectionis. Idem quoque euenire perspicuum est, si altera quidem linea sectionem contingat, altera uero in duobus punctis secet.*

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXVI.

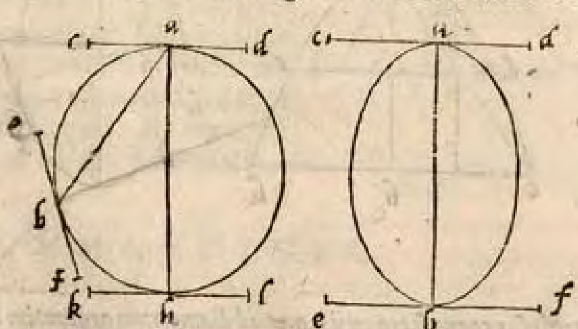
Si in ellipsi, uel circuli circumferentia duæ rectæ lineæ non transeuntes per centrum se inuicem secent; bifariam se se non secabunt.

Si enim fieri potest, in ellipsi, uel circuli circumferentia duæ rectæ lineæ c d, e f non transeuntes per centrū se se bifariam secēt in g: sitq; h centrum sectionis: & iuncta g h ad a b puncta producatur. Quoniam igitur a b diameter est, ipsam e f bi 6. huius fariam secans; linea, quæ ad a sectionem contingit, æquidi 30. primi stans erit e f. similiter demonstrabimus eandem etiam ipsi c d æquidistare. ergo e f æquidistat c d, quod est absurdum. non igitur e f, c d se se bifariam secant.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVII.

Si ellipsim, uel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingant: & si quidem ea, quæ tactus coniungit per centrum transeat sectionis: contingentes lineæ sibi ipsis æquidistabunt: sin minus, conuenient inter se se ad easdem centri partes.

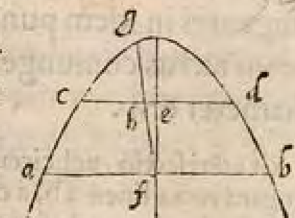
Sit ellipsis, uel circuli circumferentia a b, quam contingant duæ rectæ lineæ c a d, e b f: iungaturq; a b: & primo transeat per centrum. Dico c d ipsi e f æquidistantem esse. Quoniam enim a b diameter est sectionis: & c d in puncto a ipsam cõtingit; erit c d æquidistans lineis, quæ ad diametrum a b ordinatim applicantur: & simili ratione e f erit eisdem æquidistans. ergo c d æquidistat e f. Si uero a b per centrum non transeat, ut apparet in secunda figura, ducatur a h diameter: & per h contingens κ h l. æquidistat igitur k l ipsi c d. quare e f producta ad easdem partes centri, in quibus est a b, cum c d conueniet.



THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVIII.

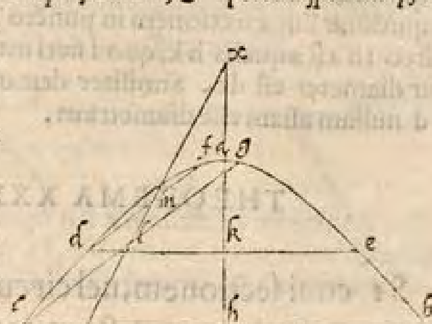
Si in coni sectione, uel circuli circumferentia duas lineas æquidistantes recta linea bifariam secet, diameter erit sectionis.

In sectione enim coni duæ lineæ æquidistantes a b, c d in punctis e f bifariam secentur: & iuncta e f producatur. Dico e f sectionis diametrum esse. Si enim non est, sit g h f diameter, si fieri posit. ergo quæ in puncto g contingit sectionem, æquidistans est ipsi a b. quare & ipsi c d. est autem g h diameter. ergo c h, h d æquales sunt, quod est absurdum: posuimus enim c e æqualem e d. non igitur g h diameter est sectionis. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam esse diametrum, præterquam ipsam e f. ergo e f sectionis diameter erit. 5. & 6. huius.

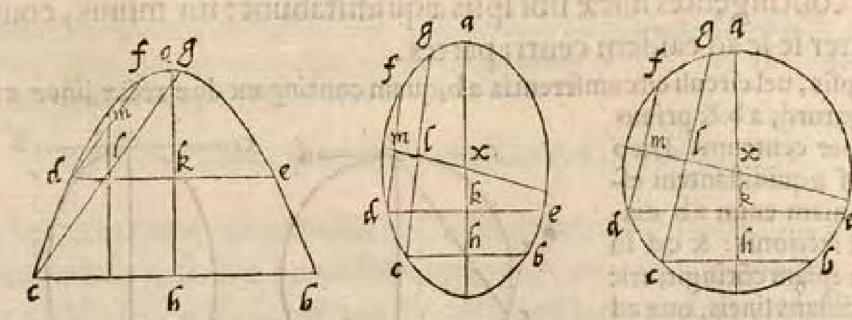


EVTOCIVS.

Non inutile erit data in plano curua linea, inuestigare utrum circuli circumferentia sit, uel alia ex coni sectionibus; an uero ab his ipsis diuersa. Itaque sit a b c; & oporteat speciem ipsius inuestigare. sumantur in linea aliqua puncta c d, per quæ ducantur intra ipsam lineæ æquidistantes c b, d e: & rursus ab iisdem punctis aliæ æquidistantes ducantur c g, d f: bifariamq; secentur; c b, d e quidem in h k punctis; c g, d f uero in l m; & iungantur h k, l m. si igitur omnes, quæ ipsi c b æquidistant, à linea h κ; & quæ æquidistant c g ab ipsa m l bifariam diuidantur; erit a b c una ex coni sectionibus, cuius diametri h k, m l; sin minus, non erit. Sed quæ sit ex quatuor comperiemus, lineas h k, l m in infinitum producentes utraque ex parte; uel enim æquidistant, & est parabole: uel ad partes quidem h l inter se conueniunt,



& est ellipsis, aut circulus: uel ad alteras partes, & est hyperbole. ellipsim uero à circulo distinguemus ex puncto, in quo conueniunt h k, m l, quod est centrum. si enim ab eo ad lineam ductae sunt aequales, constat a b c circuli circumferentiam esse; sin minus, ellipsim. Possumus autem &



aliter ipsas cognoscere ex iis, quae ad diametrum ordinatim applicantur, uidelicet c h, d k. nam si fuerit ut quadratum c h ad quadratum d k, ita h a ad a k, parabole erit; At si c h quadratum ad quadratum d k maiorem quidem habuerit proportionem, quàm h a ad a k, hyperbole; si uero minorem, ellipsis. Sed etiam ex lineis contingentibus easdem discernere licebit, si ea, quae superius dicta sunt, ipsis inesse in memoriam redigemus.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXIX.

Si coni sectionem, uel circuli circumferentiam duae rectae lineae contingentes in idem punctum conueniant; & ab eo ad punctum, quod lineam tactus coniungentem bifariam secat, alia linea ducatur; sectionis diameter erit.

Sit coni sectio, uel circuli circumferentia, quam contingant rectae lineae a b, a c, in punctum a conuenientes: & ducta b c secetur bifariam in d: & iungatur a d. Dico a d diametrum esse sectionis. Si enim fieri potest, sit d e diameter: & iungatur c e, quae sectionem ipsam secabit. Secet autem in f: & per f ipsi c d b ducatur aequidistans f h g. Itaque quoniam c d aequalis est d b, erit & f h ipsi h g aequalis. Sed linea, quae in l contingit sectionem, aequidistans est b c: & est f g eidem aequidistans. ergo f g aequidistat lineae sectionem in puncto l contingenti: & idcirco f h est aequalis h k; quod fieri minime potest. non igitur diameter est d e. Similiter demonstrabimus, praeter a d nullam aliam esse diametrum.

ex demõstratis in 6 primi huius.
5 huius

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXX.

Si coni sectionem, uel circuli circumferentiam duae rectae lineae contingentes in unum punctum conueniant: diameter, quae ab eo puncto ducitur, lineam tactus coniungentem bifariam secabit.

Sit

Sit coni sectio, uel circuli circumferentia b c: & ducantur duæ rectæ lineæ b a, a c ipsam contingentes, quæ conueniant in a: & iuncta b c per a ducatur sectionis diameter a d. Dico b d ipsi d c æqualem esse. non enim, sed si fieri potest, sit b e æqualis e c: & iungatur a e. ergo a e diameter est sectionis. est autem & a d: quod est absurdum. Si enim sectio est ellipsis, punctum a, in quo conueniunt diametri, centrum erit sectionis extra ipsam: quod fieri non potest. si uero sit parabole, diametri ipsius inter se se conuenient: quod si hyperbole, quoniam lineæ b a, a c sectioni occurrunt, & unius occursus alterius occursu non continetur, conuenient inter se se intra angulum hyperbolen continentem. sed & in ipso angulo; centrum enim ponitur, cum d a, a e diametri sint: quod est absurdum. non igitur b e ipsi e c æqualis erit. A B 25. huius

FED. COMMANDINVS.

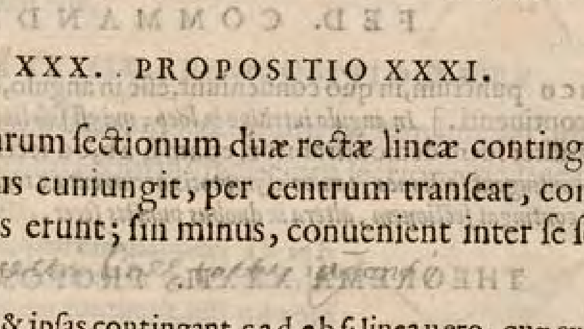
A Ergo a e diameter est sectionis.] *Ex antecedente.*

B Est autem & a d: quod est absurdum.] *Nam si sint duæ diametri a e, a d, sequitur absurdum in omnibus coni sectionibus. in parabola enim sequitur diametros inter se se conuenire, quas æquidistantes esse constat. sed in reliquis, quoniam diametri in centro conueniunt, erit a ipsarum centrum. quare in ellipsi & circulo centrum extra ponitur, quod fieri non potest. In hyperbola uero cum lineæ b a, a c ipsam contingant, conuenient quidem extra, sed tamen intra angulum, qui hyperbolen continet. atqui conueniunt in ipso angulo, uidelicet in eius centro: quod itidem est absurdum.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXI.

Si utramque oppositarum sectionum duæ rectæ lineæ contingant; & si quidem ea, quæ tactus coniungit, per centrum transeat, contingentes lineæ æquidistantes erunt; sin minus, conuenient inter se se ad easdem partes centri.

Sint oppositæ sectiones a b: & ipsas contingant c a d, e b f: linea uero, quæ ex a ad b ducitur, primum transeat per centrum sectionum. Dico c d ipsi e f æquidistantem esse. Quoniam enim oppositæ sectiones sunt, quarum diameter a b: & unam earum cōtingit linea c d in puncto a: quæ per b ipsi c d æquidistans ducitur, sectionem continget. contingit autem e f, ergo c d ipsi e f est æquidistans. sed non transeat per centrum, quæ ex a ad b ducitur: sitq; sectionū diameter a g: & h K sectionem in g contingat. ergo h k æquidistans est ipsi c d. Et quoniam hyperbolen duæ rectæ lineæ contingunt e f, h k, conuenient inter se se. est autem h K ipsi c d æquidistans. quare & c d, e f productæ inter se conueniant necesse est, & ad easdem centri partes. 25. huius 2. primi Vitell.

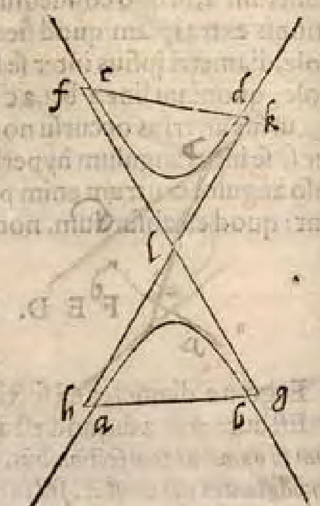


FED. COMMANDINVS.

A Quæ per b ipſi c d æquidiſtans ducitur, ſectionem continget.] *Illud uero nos demonſtrauimus in commentarijs in 44. primi huius.*

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXII.

SI utrique oppoſitarum ſectionum rectæ lineæ occurrant, ipſas uel in uno puncto contingentes, uel in duobus ſecantes; & productæ inter ſe conueniant: punctum, in quo conueniunt, erit in angulo, qui deinceps eſt angulo ſectionem continenti.



A Sint oppoſitæ ſectiones, quas uel in uno puncto contingant, uel in duobus ſecent rectæ lineæ a b, c d & productæ inter ſe conueniant. Dico punctum, in quo conueniunt, eſſe in angulo, qui deinceps eſt angulo ſectionem continenti. ſint enim ſectionum aſymptoti f g, h k. 8. huius ergo a b producta aſymptotis occurret. occurrat in h g punctis. & quoniam ponimus lineas c d, h g inter ſe conuenire, neceſſe eſt ut conueniant in locum, qui eſt ſub B angulo h l f, uel k l g. ſimiliter idem demonſtrabitur, etiam ſi a b, c d ſectiones contingant.

FED. COMMANDINVS.

A Dico punctum, in quo conueniunt, eſſe in angulo, qui deinceps eſt angulo ſectionem continenti.] *In angulo intellige in loco, qui eſt ſub lineis angulum continentibus.*

B Similiter idem demonſtrabitur, etiam ſi a b, c d ſectiones contingant.] *Nam quamquam contingant ſectiones, tamen aſymptotis occurrent ex tertia huius. idem quoque ſequetur, ſi altera contingat ſectionem, altera in duobus punctis ſecet.*

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXIII.

SI uni oppoſitarum ſectionum recta linea occurrens, & producta ex utraque parte extra ſectionem cadat; cum altera ſectione non conueniet; ſed tranſibit per tres locos; quorum unus quidem eſt ſub angulo ſectionem continente; duo uero ſub iis angulis, qui deinceps ſunt.

A Sint oppoſitæ ſectiones a b: & ſectionem a ſecet quædam recta linea c d; ita ut producta ex utraque parte extra ſectionem cadat. Dico c d cum b ſectione non conuenire. ducantur enim aſymptoti ſectionum e f, g h. ergo 8. huius c d producta aſymptotis occurret. non occurret autem in aliis punctis, quàm in e h. ergo non conueniet cum ſe- B ctione b: & per tres locos tranſibit. ſi enim cum utraque oppoſitarum ſectionum conueniret, nulli ipſarum in duobus punctis occurreret, propter ea, quæ ſuperius demonſtrata ſunt.

FED.

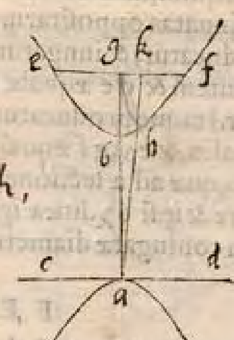
FED. COMMANDINVS.

Non occurret autem in aliis punctis. quàm in e h.] *Alioqui sequeretur, ut duarum rectarum linearum ijdem termini essent, quod est absurdum.* A

Si enim cum utraque oppositarum sectionum conueniret, nulli ipsarum in duobus punctis occurreret.] *Nam linea, quæ secat utramque continentium angulum, qui deinceps est angulo sectiones continenti, cum utraque oppositarum sectionum in uno tantum puncto conuenit, ex 16. huius. Idem etiam eueniet, si linea c d sectionem contingat, quoniam producta cum utraque asymptoton conueniet, ex terti huius; & reliqua similiter demonstrabuntur.* B

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIIII.

Si unam oppositarum sectionum recta linea contingat: & huic æquidistans ducatur in altera sectione; quæ à tactu ad mediam lineæ æquidistantis ducitur, oppositarum sectionum diameter erit.



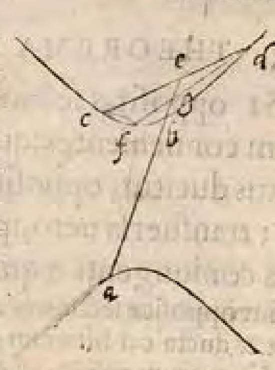
Sint oppositæ sectiones a b, quarum unam, uidelicet a cō tingat in a puncto recta linea c d: ipsiq; c d æquidistans ducatur e f in altera sectione: & secta e f in g bifariam, iungatur a g. Dico a g oppositarum sectionum diametrū esse. si enim fieri potest, sit diameter a h k. ergo quæ in h sectionem contingit, æquidistans est ipsi c d; sed & c d ipsi e f est æquidistans. quare ea, quæ contingit sectionem, in h, æquidistat e f: & propterea e k ipsi k f est æqualis: quod fieri non potest. est enim e g æqualis g f. non igitur a h diameter est oppositarum sectionum. ex quibus manifeste constat a b ipsarum diametrum esse.

5. huius

47. primi huius.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XXXV.

Si diameter in una oppositarum sectionum rectam lineam bifariam secet: quæ in termino diametri contingit alteram sectionem; lineæ bifariam sectæ erit æquidistans.

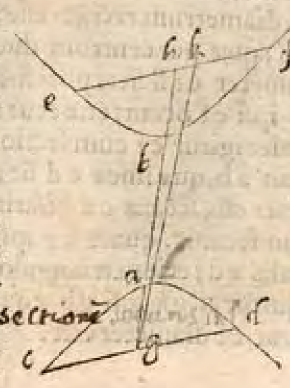


Sint oppositæ sectiones a b, quarum diameter a b in b sectione rectam lineam c d bifariam secet in e. Dico lineam, quæ in puncto a sectionem contingit, ipsi c d æquidistantem esse. si enim fieri potest, sit lineæ in a contingenti æquidistans d f. ergo d g ipsi g f est æqualis. sed & d e æqualis est e c. æquidistat igitur c f ipsi e g: quod est absurdum; producta enim c f cum ipsa e g conueniet. quare neque d f lineæ ad a contingenti est æquidistans, neque alia quæpiam præter ipsam c d.

48. primi huius.
2. sexti
22. primi huius.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XXXVI.

Si in utraque oppositarum sectionum rectæ lineæ inter se æquidistantes ducantur: quæ ipsarum medium coniungit, oppositarum sectionum diameter erit.



Sint oppositæ sectiones a b: in quarum utraque ducantur rectæ lineæ c d, e f inter se æquidistantes: & in punctis g, h, bifariam secentur: & iungatur g h. Dico g h diametrum esse oppositarum sectionum. si enim non est, sit g K sectione ergo quæ in a sectiones contingit, ipsi c d est æquidistās: 5. huius

qua in [sectionem

& idcirco ipsi e f, æquales igitur sunt e k, k f. quod fieri non potest: quoniam & e h, h f sunt æquales. ergo g k non est diameter oppositarum sectionum. quare relinquitur g h ipsarum diametrum esse.

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XXXVII.

Si oppositas sectiones recta linea secet, non transiens per centrum; quæ à medio ipsius ad centrum ducitur oppositarum sectionum diameter erit, quæ recta appellatur; transuersa uero diameter, ipsi coniugata est ea, quæ à centro ducitur æquidistans lineæ bifariam sectæ.

Sint oppositæ sectiones a b & ipsas secet recta linea c d, non transiens per centrum, quæ bifariam in e diuidatur: sitq; sectionum centrum χ: & iungatur χ e: & per χ ipsi c d æquidistans ducatur a b. Dico a b, e χ diametros esse coniugatas oppositarum sectionum. ducta enim d χ ad f
A producatur; & iungatur c f. æqualis igitur est d χ ipsi χ f.
2. sexti est autem & d e æqualis e c. ergo e χ, c f inter se æquidi-
B stant. Itaque producatur b a ad g. & quoniã d χ, χ f sunt
6. huius æquales, & e χ, g f æquales erunt. & propterea ipsæ c g, g f.
C ergo, quæ ad a sectionem contingit, æquidistans est c f.
16. primi huius. quare & ipsi e χ. lineæ igitur a b, e χ oppositarum sectionum coniugatæ diametri erunt.

FED. COMMANDINVS.

A Aequalis igitur est d χ ipsi χ f.] *Ex 30. propositione primi huius.*

B Et quoniam d χ, χ f sunt æquales, & e χ, g f æquales erunt.] *Cum enim e χ, c f æquidistent, erit triangulum d e χ simile triangulo χ g f. quare ut d χ ad χ e, ita χ f ad f g: & permu-*
14. quinti *tando ut d χ ad χ f, ita e χ ad g f. æqualis igitur est e χ ipsi g f.*

C Et propterea ipsæ c g, g f.] *Nam & c g eidem e χ est æqualis, ex trigesima quarta primi elementorum.*

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XXXVIII.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingant, in unum punctum conuenientes; quæ ab eo puncto ad medium lineæ tactus coniungentis ducitur, oppositarum sectionum diameter erit, quæ recta uocatur; transuersa uero, ipsi coniugata, quæ per centrum ducitur, lineæ tactus coniungenti æquidistans.

Sint oppositæ sectiones a b, quas rectæ lineæ c χ, χ d contingant: & ducta c d bifariam diuidatur in e. & iungatur e χ. Dico e χ diametrum rectam esse; transuersam uero, ipsiq; coniuga-
8. huius tam, quæ per centrum ducitur lineæ c d æquidistans. sit enim
A diameter e f, si fieri potest: & sumatur quoduis punctum f. ergo d χ ipsi e f occurret. occurrat in f puncto, & iungatur c f. con-
B ueniet igitur c f cum sectione. cõueniat autem in a: & per a ducatur a b, quæ lineæ c d sit æquidistans. Itaque quoniam e f diameter est, secans c d bifariam: & ipsi æquidistantes lineas bifariam secabit. quare a g ipsi g b est æqualis. sed cum c e sit æ-
C qualis e d; erit in triangulo c f d linea a g æqualis g k. ex quo
D sequitur & g k ipsi g b æqualem esse: quod fieri non potest. non igitur e f diameter erit.

FED. COMMANDINVS.

Ergo d χ ipsi e f occurrit.] *Si enim à puncto d linea ordinatim applicetur in b sectione, æquidistabit lineæ e f. quare & d X ipsi e f occurrat necesse est, ex secunda propositione Vitellionis.* A

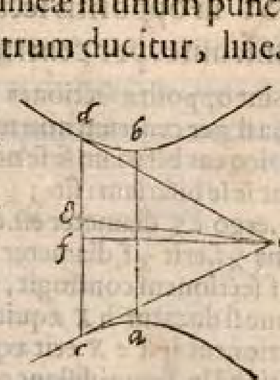
Conueniet igitur e f cum sectione.] *Nam cum e X contingat sectionem, linea e f eandem necessario secabit, ex 32. primi huius.* B

Erit in triangulo c f d linea a g æqualis g b.] *Vide quæ scripsimus in sextam primi huius.* C

Non igitur e f diameter erit.] *Deest hoc loco principalis conclusio, quam nos supplere debemus: ex his enim necessario colligitur, lineam e X oppositarum sectionum diametrum rectam esse. at uero transuersam esse eam, quæ per centrum ducitur ipsi c d æquidistans, demonstrabimus, ut in antecedenti propositione.* D

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XXXIX.

Si oppositas sectiones contingant duæ rectæ lineæ in unum punctū conuenientes; quæ per punctum illud, & per centrum ducitur, lineam tactus coniungentem bifariam secabit.



Sint oppositæ sectiones a b, quas duæ rectæ lineæ c e, e d contingant: & iuncta c d ducatur diameter e f. Dico c f ipsi f d esse æqualem. si enim non ita sit, secetur c d bifariam in g: & iungatur g e. ergo g e diameter est. A sed & e f est diameter. punctum igitur e centrum erit: B idcircoq; lineæ, quæ contingunt sectiones, in centro ipsarum conueniunt: quod est absurdum. C constat ergo c f ipsi f d æqualem esse.

FED. COMMANDINVS.

Ergo g e diameter est.] *Ex antecedenti propositione.* A

Punctum igitur e centrum erit.] *Centrum enim est, in quo oppositarum sectionum diametri conueniunt.* B

Quod est absurdum.] *Si quidem lineæ, quæ contingunt oppositas sectiones, extra centrum earum conueniunt, uidelicet in angulo, qui deinceps est angulo sectiones continenti; ut constat ex trigesima secunda huius.* C

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XL.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes in unum conueniant: & per punctum, in quo conueniunt, linea ducatur, tactus coniungenti æquidistans, & sectionibus occurrens: quæ ab occursibus ad medium lineæ tactus coniungentis ducuntur, sectiones ipsas contingunt.

Sint oppositæ sectiones a b, quas duæ rectæ lineæ c e, e d contingant: iungaturq; c d: & per e ducatur f e g ipsi c d æquidistans, secta autem c d bifariam in h, iungantur f h, h g. Dico f h, h g sectiones contingere. ducatur enim e h. ergo e h recta diameter est, A transuersa uero, ipsi coniugata, quæ per centrum ducitur æquidistans c d. itaque sumatur centrum χ, & ducatur a χ b ipsi c d æquidistās.

ergo h e,a b coniugatæ diametri sunt.atque ordinatim applicata est c h ad secundam
B diametrum; & c e sectionem contingit, secundæ diametro occurrens. rectangulum igitur e χ h æquale est quadrato dimidiæ secundæ diametri; hoc est quartæ parti figuræ,quæ ad a b constituitur.& quoniam f e ordinatim applicatur; & iungitur f h,per
C spicuum est f h contingere sectionem a.similiter & g h continget sectionem b. lineæ igitur f h,h g sectiones a b necessario contingunt.

FED. COMMANDINVS.

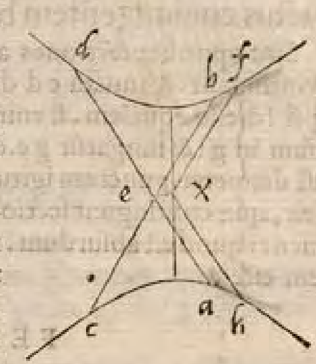
A Ergo e h recta diameter est,transuersa uero ipsi coniugata.] *Ex 38. huius.*

B Rectangulum igitur e χ h æquale est quadrato dimidiæ secundæ diametri.] *Ex 38. primi huius.*

C Perspicuum est f h contingere sectionem a.] *Ex ijs, quæ nos demonstrauimus in commentarijs 38. primi huius.*

THEOREMA XL. PROPOSITIO XLI.

SI in oppositis sectionibus duæ rectæ lineæ se inuicem secent, non transeuntes per centrum,se se bifariam non secabunt.



Sint oppositæ sectiones a b, in quibus duæ rectæ lineæ c b,a d per centrum non transeuntes,se inuicem secent in e. Dico eas bifariam se se non secare. si enim fieri potest, secent se se bifariam: sitq; χ ipsarum centrum. & iungatur
A e χ.ergo e χ diameter est.ducatur per χ lineæ b c æquidi
B stans χ f.erit χ f diameter ipsi e χ coniugata. quæ igitur in f sectionem contingit, est æquidistans e χ. Eadem ratione si ducatur h X æquidistans a d, quæ in h contingit sectionem ipsi e X erit æquidistans. ergo quæ contingit sectionẽ in f æquidistans est lineæ in h contingenti,quod
C fieri non potest:conueniunt enim inter se se, ut iam demõstratum est.non igitur c b, a d per centrum non transeuntes se se bifariam secant.

FED. COMMANDINVS.

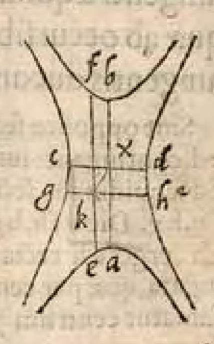
A Ergo e X diameter est.] *Ex 37. huius.*

B Erit X f diameter ipsi e X coniugata.] *Ex eadem.*

C Conueniunt enim inter se se,ut iam demonstratum est.] *Cum enim linea tactus f h coniungens non transeat per centrum,quæ sectionem contingit in f,non æquidistabit lineæ in h contingenti,sed cum ea conueniet ad easdem partes centri, ex 34. primi huius.*

THEOREMA XLI. PROPOSITIO XLII.

SI in oppositis sectionibus, quæ coniugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ se inuicem secent, non transeuntes per centrum; bifariam se se non secabunt.



Sint oppositæ sectiones,quæ coniugatæ appellantur a b,c d: & in ipsis duæ rectæ lineæ e f,g h non transeuntes per centrum se inuicem secent in κ. Dico e f,g h se se bifariam non secare. si enim fieri potest,secent se bifariam:& sit X sectionum centrum. ducatur autem a b æquidistans e f:& c d ipsi g h æquidistans; & iun-
A gatur k X.ergo k X,a b coniugatæ diametri sunt.& similiter con
B iugatæ sunt diametri κ X, c d, quare linea contingens sectionem in a æquidistat lineæ in c contingenti : quod fieri non potest:
C conueniunt enim inter se se, quoniam contingens in c sectiones

ab

ab secat: & contingens in a secat ipsas cd. patet igitur eas conuenire in locum, qui est sub angulo a X c. non igitur e f, g h per centrum non transeuntes, sese bifariã secãt. D

FED. COMMANDINVS.

ERGO k χ, a b coniugatæ diametri sunt.] *Ex trigesima septima huius.* A

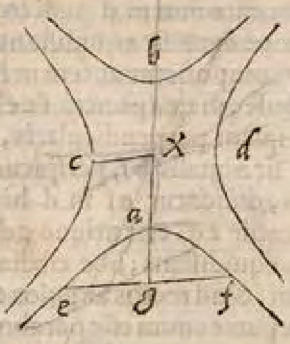
Quare linea contingens sectionem in a æquidistat lineæ in c contingenti.] *Nam quæ in a sectionem contingit, æquidistans est ipsi k χ: & similiter quæ contingit in c eidem est æquidistans. quæ autem æquidistant uni & eidem, & inter se se æquidistant. linea igitur contingens sectionem in a æquidistat ei, quæ in ipso c contingit.* B 30. primi

Conueniunt enim inter se se, quoniam contingens in c sectiones a b secat: & contingens in a secat ipsas c d.] *Ex decima nona huius.* C

Patet igitur eas conuenire in locum, qui est sub angulo a χ c.] *Conueniunt enim ad eam asymptoton, quæ inter a χ. χ c interijcitur, ex uigesima prima huius.* D

THEOREMA XLII. PROPOSITIO XLIII.

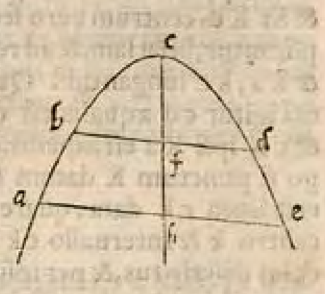
SI unam oppositarum sectionum, quæ coniugatæ appellantur recta linea in duobus punctis secet: & a centro duæ lineæ ducantur, una quidem ad medium lineæ secantis, altera uero ipsi æquidistans: erunt hæ oppositarum sectionum coniugatæ diametri.



Sint oppositæ sectiones, quæ coniugatæ appellantur a b, c d: & sectionem a quædam recta linea secet in duobus punctis e f. & e f bifariam diuidatur in g. sit autem X sectionum centrum: iungaturq; X g: & c X ipsi e f æquidistans ducatur. Dico a X, X c coniugatas diametros esse. Quoniam enim diameter est a X, & lineam e f bifariam secat; quæ in a cõtingit sectionem æquidistans est ipsi e f. quare & ipsi c X. & quoniam oppositæ sectiones sunt, & unam ipsarum, uidelicet a quædam recta linea in a contingit; a centro uero X ducuntur duæ lineæ, una quidem X a ad tactum, altera uero c X contingenti æquidistans: erunt a X, X c sectionum coniugatæ diametri: hoc enim superius demonstratum est. 5. huius 20. huius

PROBLEMA II. PROPOSITIO XLIIII.

DATA coni sectione diametrum inuenire.



Sit data coni sectio, in qua puncta a b c d e: & oporteat ipsius diametrum inuenire. Itaque factum iam sit; & diameter sit c h: ductis autem ordinatim lineis d f, e h, & productis; erit d f æqualis f b; & e h ipsi h a. si igitur ordinabimus b d, a e, ut sint positione æquidistantes; data erunt puncta h f, quare & h f c positione data erit.

Componetur autem in hunc modum. sit data coni sectio, in qua a b c d e puncta: ducanturq; lineæ b d, a e inter se æquidistantes: & in punctis f h bifariam diuidantur. ergo iuncta f h diameter erit sectionis. Eadem ratione & infinitas diametros inueniemus.

PROBLEMA III. PROPOSITIO XLV.

73 DATA ellipsi, uel hyperbola cẽtrum inuenire.

Hoc autem manifeste constat. Si enim duæ sectionis diametri a b, c d ducantur; punctum, in quo se secant, centrum erit sectionis, ut positum iam est.

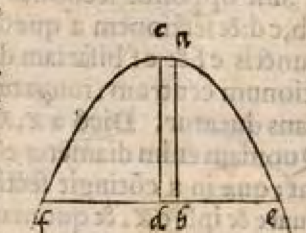
PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XLVI.

DATA coni sectione axem inuenire.

Sit coni sectio data primum parabole, in qua puncta f c e. Itaque oportet ipsius axem inuenire. Ducatur enim diameter a b: & si quidem a b sit axis, factum erit, quod proponebatur; sin minus, ponatur iam factum esse: & sit axis c d. ergo c d ipsi a b est æquidistans: & quæ ad ipsam ducuntur perpendiculares bifariam diuidit. Sed perpendiculares ad c d, & ad ipsam a b perpendiculares sunt. ergo c d bifariam diuidit perpendiculares, quæ ad a b ducuntur. si igitur ordinabimus e f perpendicularem ad a b, erit ea positione data: & idcirco e d æqualis d f. quare punctum d datum 74 erit. dato autem d puncto, & ducta d c, quæ lineæ a b positione datæ sit æquidistans; erit & ipsa d c positione data.

Componetur autem in hunc modum. sit data sectio parabole, in qua puncta f c e. ducaturq; diameter a b: & b e ad ipsam perpendicularis, quæ ad f producatur. si ergo e b sit æqualis b f, perspicuæ constat a b axem esse: sin minus, diuidatur e f in d bifariam: & ipsi a b æquidistans ducatur c d. erit utique c d sectionis axis; est enim diametro æquidistans; hoc est diameter, quæ lineam e f & bifariam, & ad rectos angulos diuidit. Datæ igitur parabolæ axis inuentus est c d. Itaque patet unum esse parabolæ axem. nam si alius axis sit, ut a b, erit ipsi c d æquidistans, & secabit e f. quare & bifariam secabit. ergo b e est æqualis b f. quod fieri non potest.

*p. 44. huius

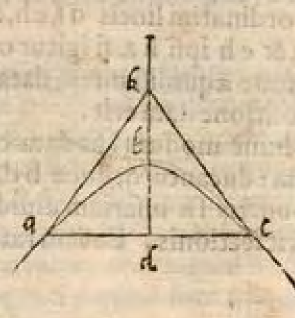


PROBLEMA V. PROPOSITIO XLVII.

DATA hyperbola, uel ellipsi axem inuenire.

75 Sit hyperbole, uel ellipsis a b c; & oporteat ipsius axem inuenire. Sit iam inuentus: & sit K d: centrum uero sectionis sit k. ergo k d lineas, quæ ad ipsam ordinatim applicantur, bifariam, & ad rectos angulos secat. Itaque ducatur perpendicularis c d a; & k a, k c iungantur. Quoniã igitur c d æqualis est d a; & c K ipsi K a est æqualis. ergo si punctum K datum sit, erit linea c k data. quare ex centro k & interuallo c k circulus descrip tus, & per ipsum a transibit, & erit positione datus. est autem & a b c sectio data positione. ergo & punctum a. sed & c est datum. da-

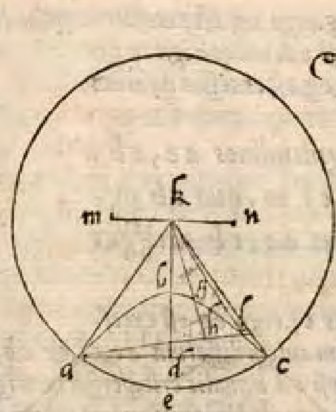
26 libri datorum

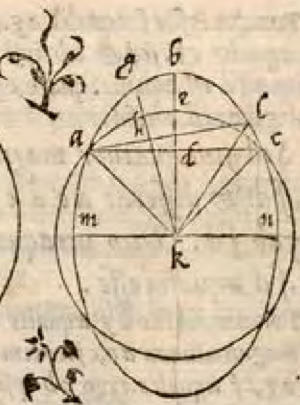


ta

76

ta igitur positione linea c a: & est c d ipsi d a æqualis. ergo punctum d datur: sed & ipsum K. linea igitur d k positione data erit. Componetur autem hoc modo, sit data hyperbole, uel ellipsis a b c: & sumpto κ ipsius centro, in sectione sumatur quod uis punctum c & ex centro k, interualloq; k c circulus describatur c e a. ducta uero c a bifariam secetur in d: & iungãtur κ c, k d, κ a: & K d ad b producatur. Itaque quoniam a d est æqualis d c: & d k communis: erunt duæ lineæ c d, d k duabus a d d K æquales: & basis K a æqualis basi k c. quare linea k d b ipsam a d c bifariam, & ad rectos angulos secat: & idcirco k d est axis. ducatur per K ipsi c a æquidistans m k n. ergo m n est axis sectionis ipsi b κ coniugatus. 26. libri datorum 7. 8. primi

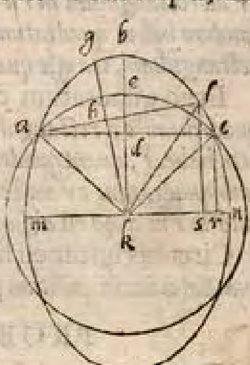




THEOREMA XLIII. PROPOSITIO XLVIII.

His autem demonstratis, reliquum est, ut ostendamus non esse alios axes ipsarum sectionum.

Si enim fieri potest; sit axis alius κ g. ergo ducta perpendiculari a h, ex iis, quæ supra diximus, erit a h æqualis h l. quare & a K ipsi K l. sed & ipsi k c. sunt igitur κ l, K c inter se æquales. quod est absurdum. Atuero circulum a e c non occurrere sectioni in alio puncto inter a c, in hyperbola quidem perspicuum est: sed in ellipsi, ducantur perpendiculares c r, l s. & quoniam K c est æqualis k l, ex centro enim sunt: erit & quadratum c K quadrato k l æquale. quadrato autem k c æqualia sunt quadrata c r, r K: & quadrato κ l æqualia quadrata l s, s k. ergo quadrata c r, r k quadratis l s, s κ æqualia erunt. quo igitur differt quadratum c r a quadrato l s, e o quadratum s k differt à quadrato κ r. Rursus quoniam rectangulum m r n unà cum quadrato r k, æquale est quadrato κ m: rectangulum autem m s n unà cum quadrato s k eidem k m quadrato est æquale: erit rectangulum m r n unà cum quadrato r k æquale rectangulo m s n unà cum s K quadrato. ergo quo differt quadratum s k à quadrato k r, eo rectangulum m r n differt à rectangulo m s n. sed demonstratum est, quo quadratum s K differt à quadrato K r, eo differre c r quadratum à quadrato l s. quo igitur differt quadratum c r à quadrato l s, eo rectangulum m r n à rectangulo m s n differt. Itaque cum applicatæ sint, c r, l s; erit ut quadratum c r ad rectangulum m r n, ita quadratum l s ad rectangulum m s n. demonstratum autem est in utrisque eundem esse excessum. ergo quadratum c r rectangulo m r n est æquale: & quadratum l s. æquale rectangulo m s n. circulus igitur est linea l c ~~m~~. quod est absurdum. posuimus enim ellipsim esse. A 47. primi B 5. secūdi D C E F n

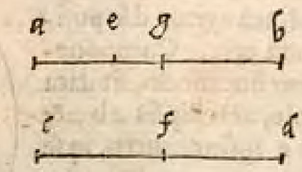


EVTOCIVS.

Quo igitur differt quadratum c r à quadrato l s, eo quadratum s κ differt à quadrato k r. B

Sint duæ magnitudines æquales a b, c d: & diuidantur in partes inæquales in punctis e f. Dico quo differt a e à c f, eo e b differre ab f d.

Ponatur ipsi c f æqualis a g. ergo e g est excessus magnitudinum a g, a c; hoc est c f, a e: est enim a g æqualis c f. sed & a b ipsi c d. reliqua igitur g b reliquæ f d est æqualis. quare e g est excessus ipsarum e b, b g, hoc est e b, f d.



Sed sint quatuor magnitudines a e, e b, c f, f d: & differat a e à c f eo, quo e b differt ab f d. Dico utraque a e, e b utrisque c f, f d æqualia esse.

78

Ponatur rursus a g æqualis c f. ergo e g est excessus magnitudinum a e, c f. eodem autem differunt a e, c f, & e b, f d. æquales igitur sunt g b, f d. sed & a g, c f æquales. ergo a b ipsi c d æqualis erit. perspicuum igitur est, si prima excedat secundam, magnitudine aliqua; & eadem magnitudine tertia quartam excedat: primam & quartam, secundæ & tertiæ æquales esse iuxta aritimeticam proportionem. Itaque his positis, si sit ut prima ad tertiam, ita secunda ad quartam: prima quidem tertiæ æqualis erit: secunda uero quartæ. potest enim hoc in alijs demonstrari, propterea quòd in uigesimo quinto theoremate quinti libri elementorum Euclidis demonstratum est, si quatuor magnitudines proportionales sint, primam & quartam reliquis duabus maiores esse.

FED. COMMANDINVS.

A Et quoniam k c est æqualis K l, ex centro enim sunt.] *Nam si ponamus utraque puncta c l esse in ellipsi & circulo, erunt lineæ k c, k l ex circuli centro: & idcirco inter se æquales.*

C Quo igitur differt quadratum c r à quadrato s l, eo rectangulum m r n à rectangulo m s n differt.] *Ex his sequitur per ea, quæ Eutocius hoc loco demonstrauit, quadratum c r unà cum rectangulo m s n æquale esse quadrato s l unà cum m r n rectangulo.*

D Itaque cum applicatæ sint c r, l s, erit ut quadratum c r ad rectangulum m r n, ita quadratum l s ad rectangulum m s n.] *Ex uigesima prima primi huius: quadratum enim c r ad rectangulum m r n eam proportionem habet, quam figuræ rectum latus ad transuersum, &* 11. quinti *eandem habet quadratum l s ad rectangulum m s n. quare sequitur, ut quadratum c r ad m r n rectangulum, ita esse quadratum l s ad rectangulum m s n.*

E Ergo quadratum c r rectangulo m r n est æquale.] *Si enim fieri potest, non sit æquale quadratum c r rectangulo m r n. & cum quadratum c r ad rectangulum m r n eandem proportionem habeat, quam quadratum l s ad m s n rectangulum; erit ex uigesima quinta quinti elementorum quadratum c r unà cum rectangulo m s n, uel maius, uel minus quadrato s l unà cum rectangulo m r n: quod est absurdum; supra enim demonstrauimus ea inter se se æqualia esse.*

F Circulus igitur est linea l c m.] *Ex 2. lemmate Pappi in primum librum, & ex ijs, quæ Eutocius in quintam propositionem primi libri demonstrauit.*

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XLIX.

DATA coni sectione, & puncto non intra sectionem dato, ab eo rectam lineam ducere, quæ sectionem contingat.

Sit data coni sectio primum parabole, cuius axis b d: & oporteat à puncto non intra sectionem dato rectam lineam ducere, ut ante propositum est. Itaque datum punctum uel est in linea, uel in axe, uel in loco, quod extra relinquitur. sit primum in linea, quod sit a: ponaturq; iam factum esse: & sit linea a e. ducatur autem

A B perpendicularis a d, quæ positione data erit. & erit b e æqualis b d. at b d est data. data igitur est b e: estq; pun

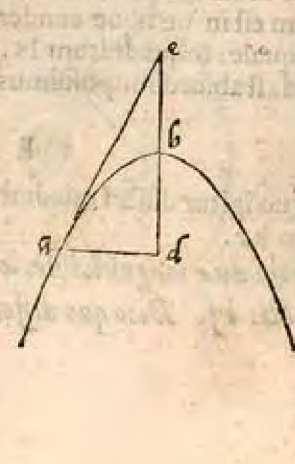
C ctum b datum. ergo & punctum e. sed datum quoque

D est a punctum. linea igitur a e positione data erit.

79

Componetur autem in hunc modum. Ducatur ex puncto a perpendicularis a d: ponaturq; b e ipsi b d

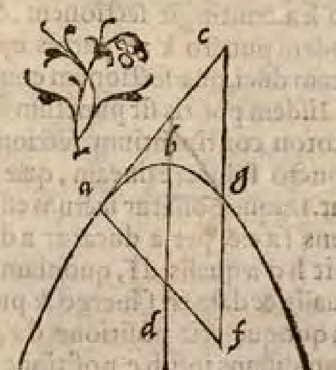
E æqualis: & iungatur a e. lineam igitur a e sectionem con-



contingere manifesto constat. Sit rursus punctum e in axe datum: ductaq; iam sit linea a e sectionem contingens: & perpendicularis ducatur a d. ergo b e est æqualis F b d: & est data b e. quare & b d. sed datum est b punctum. ergo & d datum erit. quòd G H cum d a perpendicularis sit, & positione erit data. quare & punctum a. sed & e datum. linea igitur a e positione data erit.

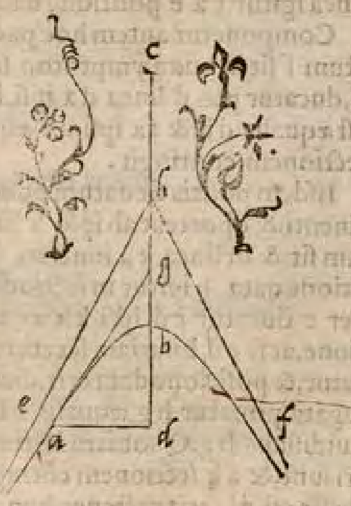
Componetur uero in hunc modum. ponatur ipsi b e æqualis b d: & à puncto d ducatur d a ipsi e d perpendicularis: iungaturq; a e. manifestum est lineam a e contingere sectionem. 35. primi huius. sed & illud constat si datum punctum sit idem, quod b, lineam, quæ ab eo perpendicularis ducitur, sectionem ipsam contingere. K

Sit datum punctum c, & factum iam sit, quod proponebatur: sitq; linea c a contingens: & per c ducatur c f æquidistans axi, hoc est ipsi b d. ergo c f positione data est: & à puncto a ad c f ordinatim applicetur a f. erit c g æqualis g f: & g est datum. L datum igitur erit & ipsum f. ordinatim autem applicatur f a, hoc est æquidistans ei, quæ in g sectionem contingit. data igitur est f a positione. & idcirco punctum a datum. sed & punctum c. ergo c a positione data erit.



Componetur autem hoc modo. ducatur per c ipsi b d æquidistans c f: ponaturq; f g æqualis g c: & ei, quæ in g contingit sectionem, æquidistans ducatur f a: & a c iungatur. perspicuum igitur est lineam a c facere illud, quod faciendum proponebatur.

Sit rursus hyperbole, cuius axis c b d, centrum h, & asymptoti h e, h f: punctum uero datum, uel in sectione erit, uel in axe, uel intra angulum lineis e h f contentum; uel in loco, qui deinceps est; uel in una asymptoton continentium sectionem, uel in loco intermedio inter continentes angulum ad uerticem eius, qui lineis f h e comprehenditur.



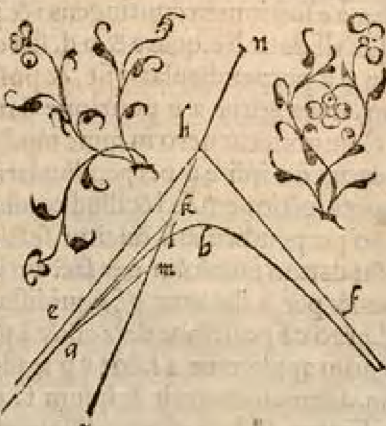
Itaque sit primum in sectione, ut a: factumq; iam sit, & linea a g sectionem contingat. ducatur autem perpendicularis a d: & b c sit transuersum figuræ latus. erit ut c d ad d b, ita c g ad g b. sed proportio M c d ad d b est data, quòd utraque data sit. proportio igitur c g ad g b erit data. & est data b c. quare & g N datum. sed & ipsum a. ergo a g positione data erit.

Componetur autem sic. Ducatur à puncto a perpendicularis a d: & proportio c g ad g b eadem sit, quæ c d ad d b: & iungatur a g. patet igitur lineam a g contingere sectionem. O

Rursus sit datum punctum g in axe: & factum iam sit: ducaturq; contingens a g: & a d perpendicularis. erit eadem ratione, ut c g ad g b, ita c d ad d b: & data est c b d. 36. primi huius. ergo punctum d datum. est autem d a perpendicularis. quare & positione data erit: & est sectio data positione. datum igitur est a punctum. sed & ipsum g. ergo a g positione dabitur. Componetur autem hoc modo. ponantur alia eadem: & fiat proportio c d ad d b eadem, quæ est c g ad g b: & ducta d a perpendiculari, iungatur a g. 34. primi huius. constat igitur lineam a g facere illud, quod proponebatur: & à puncto g ad partes oppositas alterã duci lineam, quæ sectionem contingat.

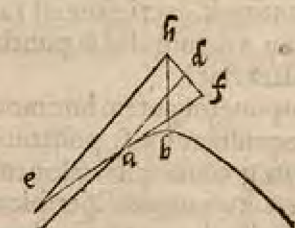
Iisdem positis, sit datum punctum κ in loco, qui intra angulum e h f continetur: & oporteat ab eo puncto lineam ducere, quæ sectionem contingat. ponatur iam factum esse: & sit linea contingens k a: iungatur autem κ h, & producatur adeo, ut ipsi l h sit æqualis h n. omnia igitur data erunt. quare & ipsa l n. Itaque ordinatim applicetur a m ad m n. erit ut n κ ad k l, ita n m ad

m l. proportio autem n k ad κ l est data. data igitur erit & proportio n m ad m l.
27. libri datorum estq; punctum l datum. ergo & m; & ordinatim applicata est m a, æquidistans ei quæ in l sectionem
28. dato. contingit. quare & m a datur positione. at positione datur sectio a l b. ergo & punctum a. sed & κ
26 datur. data igitur erit linea a k.



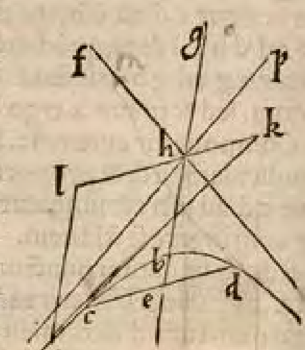
Componetur autem hoc modo. ponantur alia eadem: & sit datum punctum k: iunctaq; k h producatur: & sit h n æqualis l h. fiat autem ut n κ ad k l, ita n m ad m l: & ei, quæ in l sectionem contingit, æquidistans ducatur m a; & k a iungatur. ergo k a contingit sectionem. & manifestum est ab eodem puncto k ad partes oppositas alteram lineam duci, quæ sectionem contingit.

Iisdem positis sit punctum f datum in una asymptoton continentium sectionem: oporteatq; à puncto f ducere lineam, quæ sectionem contingat. Itaque ponatur factum esse: & sit linea contingens f a e: & per a ducatur a d ipsi e h æquidistãs.
P erit h d æqualis d f, quoniam & f a ipsi a e est æ-
26. Dato. qualis: & data est f h: ergo & punctum d datum. da-
7 ta quoque erit positione d a, quæ per d ducitur
28 æquidistans ipsi h e positione datæ: & sectio data est positione. ergo & punctum a. sed & f datum. linea igitur f a e positione data erit.



Componetur autem hoc pacto. sit sectio a b, cuius asymptoti e h, h f: & datum punctum f sit in una asymptoton sectionem continentium: secta autem f h bifariam in
2. sexti d, ducatur per d linea d a ipsi h e æquidistans: & iungatur f a. Quoniam igitur f d
Q est æqualis d h: & f a ipsi a e æqualis erit. quare ex iis, quæ demonstrata sunt, linea f a sectionem contingit.

Iisdem positis sit datum punctum k in loco, qui deinceps est angulo sectionem continenti: & oporteat ab ipso k lineam ducere, quæ contingat sectionem. Itaque factum iam sit: & sit linea k a iunctaq; k h producatur. erit ea po-
M sitione data. si igitur in sectione sumatur punctum c, &
28. libri datorum per c ducatur c d ipsi k h æquidistans: erit c d data positione. at si c d bifariam secetur in e; iunctaq; h e produ-
37. huius catur; & positione data erit, diameter scilicet ipsi k h coniugata. ponatur h g æqualis b h: & per a ducatur a l æquidistans b g. Quoniam igitur k l, b g coniugatæ diame-
O tri sunt, & a k sectionem cõtingit: ipsiq; b g æquidistans
R ducta est a l: erit rectangulum κ h l æquale quartæ parti figuræ, quæ ad b g constituitur. quare & ipsum datum erit. est autem κ h data. ergo & h l. sed & positione. estq; datum punctum h. ergo & l. & cum per l ducta sit l a æquidistans b g positione datæ, ipsa quoque positione dabitur. At sectio etiam datur positione. quare & a punctum. sed & k. ergo linea a k positione data erit.

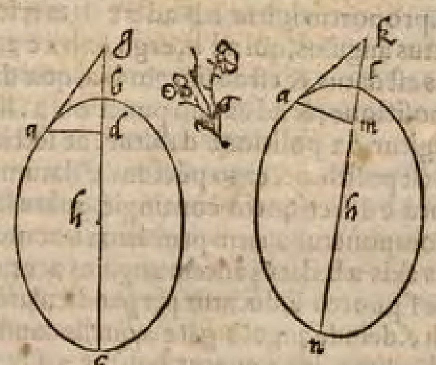


Componetur autem sic. ponantur alia eadem: sitq; datum punctum k in loco, quẽ diximus: & iuncta κ h producatur. sumpto autem in sectione puncto c, ducatur c d ipsi k h æquidistans: & c d bifariam in e secetur: iunctaq; e h producatur: & ipsi b h
37. huius ponatur æqualis h g. ergo g b transuersa diameter est, ipsi κ l h coniugata. deinde ponatur quartæ parti figuræ, quæ est ad b g, æquale rectangulum ~~κ l h~~: perq; l ipsi b g Kh
S æquidistans ducatur l a: & κ a iungatur. linea igitur κ a sectionem continget per conuersionem trigesimi octaui theorematis primi libri. At si in loco inter f h p interie-
cto

cto aliquod punctum detur, quod propositum est, fieri non potest. linea enim contingens secabit g h. quare & utrique ipsarum f h, h p occurret; quod est absurdum, ex ijs, quæ in 31. theoremate primi libri, & in tertio huius demonstrata sunt.

Iisdem positis sit sectio data ellipsis: datum uero pũctum in sectione a. & oporteat ab ipso a ducere lineam, quæ sectionem contingat. Itaque ponatur factum esse: sitq; linea contingens a g: & ab a ad b c axem ordinatim applicetur a d. erit punctum d datum. & ut c d ad d b, ita erit c g ad g b. sed proportio c d ad d b est data. ergo & proportio c g ad g b data erit: & idcirco punctum g. sed & a. quare & a g erit positione data. 36. primi huius.

Componetur autem hoc pacto. ducatur perpendicularis a d: & c g ad g b proportio eadem sit, quæ proportio c d ad d b: iungaturq; a g. constat igitur a g sectionem contingere, quemadmodum & in hyperbola. 34. primi huius.



Sit rursus datum punctum k, à quo oporteat contingentem lineam ducere. Itaque factum iam sit: & sit linea k a: ductaq; k l h ad h centrum producatur in n. erit ea positione data. quòd si a m ordinatim applicetur, erit ut n k ad k l, ita n m ad m l. proportio autem n k ad k l est data. ergo & data proportio n m ad m l. quare & punctum m: & applicata est m a; æquidistat enim lineæ in l contingenti. ergo m a positione dabitur: & idcirco punctũ a. sed & ipsum k est datum. linea igitur k a positione data erit. 36. primi huius.

Compositio autem eadem est, quæ supra.

FED. COMMANDINVS

Quæ positione data erit.] *Ex 30. propositione libri Datorum Euclidis.* A

Et erit b e æqualis b d.] *Ex 35. primi huius.* B

Ergo & punctum e.] *Ex 27. libri Datorum.* C

Linea igitur a e positione data erit.] *Ex 26. eiusdem.* D

Lineam igitur a e sectionem contingere manifesto constat.] *Ex 33. primi huius.* E

Ergo b e est æqualis b d.] *Ex 35. eiusdem.* F

Ergo & d datum.] *Ex 27. libri Datorum.* G

Quod cum d a perpendicularis sit, & positione data erit.] *Ex 29. eiusdem.* H

Sed & illud constat, si datum punctum sit idem quod b.] *Ex 17. primi huius.* K

Ergo c f positione data erit.] *Ex 28. libri Datorum.* L

Erit ut c d ad d b, ita c g ad g l.] *Ex 36. primi huius.* M

Et est data b c. quare & g datum.] *Quoniam enim linea b c data in datam proportionem diuiditur, erunt & c g, g b datæ ex septima libri Datorum, & est datum punctum c. ergo & g erit datum ex 27. eiusdem.* N

Patet igitur lineam a g contingere sectionem.] *Ex 34. primi huius.* O

Erit h d æqualis d f, quoniam & f a ipsi a e est æqualis.] *Nam cum f a sit æqualis a e ex tertia huius, & f d ipsi d h æqualis erit, ex secunda sexti elementorum.* P

Quare ex ijs, quæ demonstrata sunt, linea f a sectionem contingit.] *Ex 9. huius.* Q

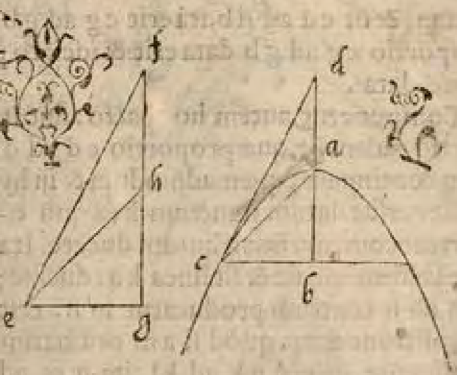
Erit rectangulum k h l æquale quartæ parti figuræ, quæ ad b g constituitur.] *Est enim ex 38. primi huius, rectangulum k h l æquale quadrato, quod fit ex dimidia secundæ diametri, hoc est æquale quartæ parti figuræ ad b g constitutæ; quoniam secunda diameter mediam proportionem obtinet inter figuræ latera, ex diffinitione secundæ diametri.* R

Linea igitur k a sectionem contingit per conuersionem trigesimi octaui theorematis.] *Hunc locum nos restituimus, etenim in græco exemplari numerus theorematis deerat, ui de eius demonstrationem in commentarijs, quæ nos in 38. primi huius conscripsimus.* S

PROBLEMA VII. PROPOSITIO L.

Data ſectione coni, lineam contingentem ducere, quæ cum axe ad partes ſectionis angulum faciat, dato angulo acuto æqualem.

Sit coni ſectio primum parabole, cuius axis a b. Itaque oportet lineam ducere, quæ ſectionem contingat, & cum a b faciat angulum ad partes ſectionis, dato angulo acuto æqualem. ponatur factum eſſe: & ſit linea c d. datus igitur eſt b d c angulus. ducatur perpendicularis b c. eſt autem angu-



A lus, qui ad b datus. quare data eſt proportio d b ad b c. ſed d b ad b a proportio eſt

B data. proportio igitur a b ad b c data erit.

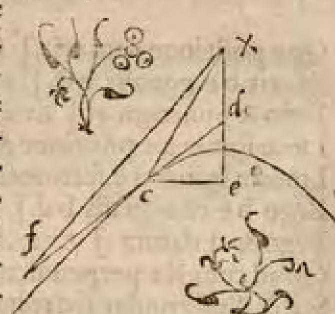
C & datus angulus, qui ad b. ergo & b a c angulus eſt datus. & eſt ad lineam b a, quæ datur poſitione; & ad datum punctum a. li-

D nea igitur c a poſitione dabitur. at ſectio data eſt poſitione. ergo pũctum c datum; & linea c d ſectionem contingit. quare & poſitione data erit.

Componetur autem problema hoc modo. ſit data coni ſectio primum parabole, cuius axis a b: datus autem angulus acutus, qui lineis e f g continetur: ſumptoq; in linea e f puncto e, ducatur perpendicularis e g: & f g in h bifariam ſecetur: & iungatur h e. deinde angulo g h e æqualis conſtituatur angulus b a c: & ducta perpendiculari b c, lineæ b a ponatur æqualis a d: & c d iungatur. ergo linea c d ſectionem contingit. Dico angulum c d b angulo e f g æqualem eſſe. Quoniam enim eſt ut f g ad g h, ita d b ad b a: & ut h g ad g e, ita a b ad b c: erit ex æquali ut f g ad g e, ita d b ad b c. ſed anguli, qui ad g b recti ſunt. angulus igitur f angulo d eſt æqualis.

E Sit ſectio hyperbole: ponaturq; iam factum eſſe, & linea c d ſectionem contingat. ſumpto autem χ ſectionis centro, iungatur c χ: & c e

37. primi huius. perpendicularis ducatur. ergo data eſt proportio rectanguli χ e d ad quadratum e c: eadem enim eſt, quæ tranſ-



F uerſi lateris ad rectum. proportio autem quadrati c e ad quadratum e d eſt data: quòd datus ſit uterque an-

G gulorum c d e, d c e. quare & rectanguli χ e d ad qua-

H dratum e d proportio data erit. & idcirco proportio

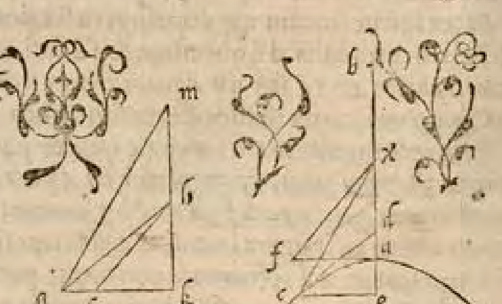
K χ e ad e d. ſed angulus qui ad e eſt datus. ergo & qui ad χ. & ad lineam χ e poſitione datam, & ad datum pun-

L ctum χ ducta eſt χ c in dato angulo. ergo & χ c poſitione dabitur. data eſt autẽ & ipſa ſectio poſitione. quare & c pũctum: & ducta eſt c d contingens. linea igitur c d poſitione erit data. Ita-

M que ducatur f χ ſectionis aſymptotos. ergo c d producta aſymptoto occurret. occur

N rat in f. erit f d e angulus angulo f χ d maior: & propterea in compoſitione problematis oportebit datum angulum acutũ maiorem eſſe, quàm ſit dimidius eius, quem aſymptoti continent.

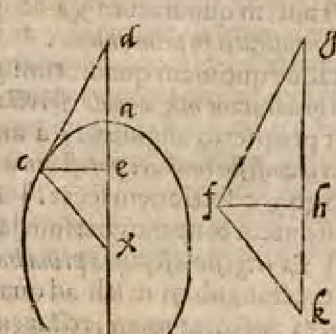
Componetur autem problema hoc modo. Sit data hyperbole, cuius axis quidem a b, aſymptotos autem χ f: & datus angulus acutus k h g, qui ſit maior angulo a χ f; ſitq; angulo a χ f æqualis angulus k h l: & a puncto a ad rectos angulos ipſi a b ducatur a f: in linea uero g h ſumatur aliquod punctum g, à quo ad h k perpẽdicularis ducatur g k. Quoniam igitur angulus f χ a angulo l h k eſt



O æqualis: & anguli ad a k recti ſunt: erit

ut χ a ad a f, ita h k ad k l: & h k ad k l maiorem proportionem habet, quàm ad k g. 8.quinti.
ergo & χ a ad a f maiorem habet proportionem, quàm h k ad k g: & idcirco quadratum χ a ad a f quadratum maiorem habet, quàm quadratum h k ad quadratum k g. Vt autem quadratum χ a ad quadratum a f, ita transuersum figuræ latus ad rectum. P
quare transuersum figuræ latus ad rectum maiorem proportionem habet, quàm quadratum h k ad quadratum k g. si igitur fiat ut quadratum χ a ad quadratum a f, ita aliud quoddam ad quadratum K g; erit illud quadrato h k maius. sit rectangulum 8.quinti
m k h: & iungatur g m. Itaque quoniam quadratum m k maius est rectangulo m k h, Q
habebit quadratum m K ad quadratum K g maiorem proportionem, quàm rectangulum m k h, ad idem k g quadratum, hoc est maiorem, quàm quadratum χ a ad quadratum a f. Quòd si rursus fiat, ut quadratum m k ad quadratum k g, sic quadratum χ a ad aliud quoddam: erit id minus quadrato a f; & recta linea, quæ à χ ad sumptum punctum ducitur, triangula similia efficiet: ac propterea angulus f χ a angulo g m k R
erit maior. ponatur angulo g m κ æqualis angulus a χ c. ergo χ c sectionem secat. se- S
cet in c: & à c ducatur c d sectionem contingens: & c e perpendicularis. triangulum igitur c χ e simile est triangulo g m κ. quare ut quadratum χ e ad quadratum e c, ita 4.& 22.sexti.
quadratum m k ad quadratum K g. est autem ut transuersum figuræ latus ad rectum, ita rectangulum χ e d ad quadratum e c: & rectangulum m k h ad quadratum k g: & T
conuertendo, ut quadratum c e ad rectangulum χ e d, ita quadratum k g ad rectangulum m k h. ex æquali igitur ut quadratum χ e ad rectangulum χ e d, ita quadratum m k ad rectangulum m k h: proptereaq; ut χ e ad e d, ita m k ad k h. Sed ut c e ad e χ, ita erat g k ad κ m. quare rursus ex æquali ut c e ad e d, ita g K ad k h: & sunt anguli, qui ad e k recti. angulus igitur ad d angulo g h k est æqualis. 6.sexti V

Sit sectio ellipsis, cuius axis a b: & oporteat lineam ducere, quæ sectionem contingat; & cum axe ad partes sectionis faciat angulum dato angulo acuto æqualem. Itaque factum sit: & sit linea c d. ergo angulus c d a est datus: & ducatur perpendicularis c e. proportio igitur quadrati d e ad quadratum e c data est. Sit sectionis centrum χ: & iungatur c χ. erit proportio quadrati c e ad rectangulum d e χ data: eadem enim 37. 1. huius.
est, quæ proportio recti lateris ad transuersum. ergo dabitur proportio quadrati d e ad rectangulum d e χ: & idcirco proportio d e ad e χ. proportio autem d e ad e c 8.datorũ
est data. data igitur & proportio c e ad e χ. sed angulus, qui ad e rectus est. ergo datus angulus ad χ, qui quidem est ad lineam positione datam, 41.datorum.
& ad datum punctum. quare datum erit punctum c: & linea c d à dato puncto ducitur, & sectionem contingit. ergo positione data erit.



Componetur autem problema hoc modo. sit datus angulus acutus f g h: sumaturq; in linea f g punctum f: & f h perpendicularis ducatur. deinde fiat ut rectum latus ad transuersum, ita quadratum f h ad rectangulum g h k. & iungatur k f. sit autem sectionis centrum χ: & angulo h κ f æqualis angulus constituatur a χ c: & ducatur c d, sectionem contingens. Dico lineam c d facere illud, quod proponebatur; uidelicet angulum c d e angulo f g h æqualem esse. Quoniam enim ut χ e ad e c, ita κ h ad h f; erit ut quadratũ χ e ad quadratũ e c, ita k h quadratũ ad ipsum h f. est autem & ut quadratũ c e ad rectangulũ d e χ, ita quadratum f h ad rectangulum g h k: utraque enim proportio eadem est, quæ recti lateris ad transuersum. quare ex æquali ut quadratum χ e ad rectangulum χ e d, ita quadratum k h ad rectangulum K h g. ergo ut linea χ e ad e d, ita est k h ad h g. estq; ut χ e ad e c, ita k h ad h f. ex æquali igitur ut d e ad e c, ita g h ad h f. quòd cum circa rectos angulos latera proportionalia sint, angulus c d e angulo f g h est æqualis. linea igitur c d facit illud, quod propositum fuerat. 6.sexti

FED. COMMANDINVS.

A QVARE data est proportio d b ad b c.] *Cum enim anguli c d b, d b c dati sint, erit & b c d reliquus ex duobus rectis datus. quare ex quadragesima propositione libri datorum Euclidis, triangulum d c b dabitur specie: & propterea laterum ipsius proportio data erit.*

B Proportio igitur a b ad b c data erit.] *Ex octaua propositione libri datorum, utraque enim ipsarum a b, b c ad eandem d b proportionem habet datam.*

C Et datus angulus, qui ad b. ergo & b a c angulus est datus.] *Ex quadragesima prima eiusdem libri. datur namque triangulum a b c specie. ergo & reliqui ipsius anguli dabuntur.*

D Linea igitur c a positione dabitur.] *Ex uigesima nona eiusdem libri.*

E Angulus igitur f angulo d est æqualis.] *Ex sexta sexti elementorum.*

F Proportio igitur quadrati c e ad quadratum e d est data, quòd datus sit uterque angulorum c d e, d e c.] *Datus est enim angulus c d e, itemq; d e c, qui est rectus. ergo & reliquus e c d; & triangulum d c e specie dabitur, ex quadragesima propositione datorum. data est igitur proportio lateris c e ad e d: & idcirco ex quinquagesima eiusdem, quadrati c e ad quadratum e d proportio data sit necesse est.*

G Quare & rectanguli χ e d ad quadratum e d proportio data erit.] *Ex octaua eiusdem. data est enim utrinsque proportio ad quadratum e c.*

H Et idcirco proportio χ e ad e d.] *Eadem namque est, quæ rectanguli χ e d ad quadratum e d, ex prima sexti elementorum, uel ex lemmate in 22. decimi.*

K Sed angulus, qui ad e est datus, ergo & qui ad χ.] *Quoniam enim proportio χ e ad e d est data: & data proportio c e ad e d, ex ijs, quæ supra dicta sunt: erit ex octaua datorum χ e ad e c proportio quoque data: & est datus angulus ad e rectus. ergo triangulum χ e c specie datur, ex quadragesima prima eiusdem, & propterea reliqui ipsius anguli dati erunt.*

L Ergo & χ c positione dabitur.] *Ex uigesima nona eiusdem.*

M Ergo c d producta asymptoto occurret.] *Ex tertia huius.*

N Erit f d e angulus angulo f χ d maior.] *Ex decima sexta primi elementorum.*

O Erit ut χ a ad a f, ita h K ad K l.] *Ex quarta sexti, sequitur enim ex iam dictis triangulum f χ a triangulo g h k simile esse.*

P Vt autem quadratum χ a ad quadratum a f, ita trãsuersum figuræ latus ad rectum.] *Ex demonstratis in prima huius.*

Q Itaque quoniam quadratum m k maius est rectangulo m k h.] *Nam ex prima secundi quadratum m k æquale est rectangulo m k h, & rectangulo k m h.*

R Et propterea angulus f χ a angulo g m k maior erit.] *Hoc etiam ex sexto lemmate Pappi manifesto constare potest: cum m k ad k g maiorem habeat proportionem, quàm χ a ad a f.*

S Ergo χ c sectionem secat.] *Ex secunda huius.*

T Est autem & ut transuersum latus ad rectum, ita rectangulum χ e d ad quadratum e c.] *Ex trigesima septima primi huius.*

V Et rectangulum m k h ad quadratum k g.] *Ex ijs, quæ superius ostensa sunt. quare sequitur ex undecima quinti, rectangulum χ e d ad quadratum e c ita esse, ut rectangulum m k h ad quadratum k g.*

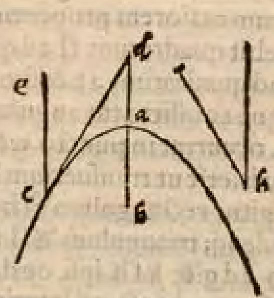
PROBLEMA VIII. PROPOSITIO LI.

DATA sectione coni, lineam contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum, dato angulo acuto æqualem.

Sit data coni sectio primum parabole, cuius axis a b: & datus angulus h. Itaque oportet ducere lineam, quæ parabolen contingat; & cum diametro, quæ per tactum ducitur, contineat angulum æqualem dato angulo h. factum iam sit: & linea contingens sit c d, quæ quidem cum diametro e c per tactum ducta faciat angulum e c d, an-

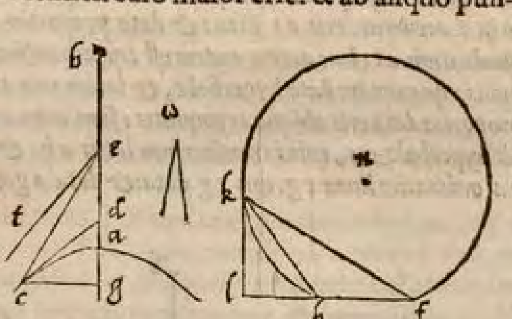
gulo

gulo h æqualem: & axi in puncto d occurrat. Quoniam igitur a d æquidistat e c, angulus a d c angulo e c d est æqualis: & datus est angulus e c d; est enim æqualis angulo h. ergo & a d c angulus datus erit. 46. primi huius. 29. primi element.

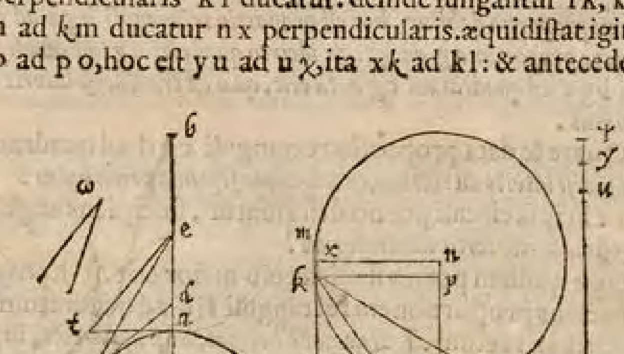


Componetur autem hoc modo. Sit parabole, cuius axis a b: & datus angulus h. Ducatur linea c d sectionem cõtingens, quæ cum axe faciat angulum c d a æqualem angulo h: & per c ducatur e c ipsi a b æquidistans. Itaque quoniam angulus h angulo a d c est æqualis: angulus autem a d c est æqualis angulo e c d: & h angulus angulo e c d æqualis erit. 30. huius 90

Sit sectio hyperbole, cuius axis a b, centrum e, & asymptotos e t: datus autem angulus acutus sit ω: & linea c d sectionem contingat: iungaturq; c e faciens illud, quod propositum est: & c g perpendicularis ducatur. Itaque proportio transuersi lateris ad rectũm data est: quare & data proportio rectanguli e g d ad quadratum c g. exponatur recta linea data f h: & in ipsa circuli portio describatur, suscipiens angulum æqualem angulo ω; quæ quidem portio semicirculo maior erit: & ab aliquo puncto eorum, quæ sunt in circumferentia, uidelicet à puncto k ducatur perpendicularis k l, faciens proportionem rectanguli f l h ad quadratum l k eandem, quæ est transuersi lateris ad rectum: & iungantur f k, K h. quoniam igitur angulus f k h est æqualis angulo e c d: est autem ut transuersum latus ad rectum, ita & rectangulum e g d ad quadratum c g: & rectangulum f l h ad quadratum k l: erit triangulum κ f l triangulo c e g simile: & triangulum f h κ simile triangulo e d c. quare angulus k f h angulo c e d est æqualis. A B C D E F G H 91



Componetur autem hoc modo. sit data hyperbole a c, cuius axis a b, centrum e; & asymptotos e t. datus autem angulus acutus sit ω: & data proportio transuersi lateris ad rectum sit eadem, quæ lineæ ψ χ ad χ u: & ψ u in y bifariam secetur. deinde exponatur data recta linea f h: & in ipsa circuli portio maior semicirculo describatur, quæ suscipiat angulum æqualem angulo ω: sitq; f k h. sumatur autem circuli centrum n, à quo ad f h perpendicularis ducatur n o: & n o secetur in p, ita ut n p ad p o eandem habeat proportionem, quam y u ad u χ: & per p ipsi f h æquidistans ducatur p x: & à k ad f h productam perpendicularis K l ducatur. deinde iungantur f K, κ h: producaturq; l k ad m: & ab n ad k m ducatur n x perpendicularis. æquidistat igitur n x ipsi f h: proptereaq; ut n p ad p o, hoc est y u ad u χ, ita x k ad k l: & antecedentium dupla, ut ψ u ad u χ, ita m k ad k l: componendoq; ut ψ χ ad χ u, ita m l ad l k. sed ut m l ad l k, ita rectangulum m l κ ad quadratum l k. Vt igitur ψ χ ad χ u, ita rectangulum m l k ad quadratum l k: hoc est rectangulum f l h ad l k quadratum: ut autem ψ χ ad χ u, ita transuersum latus ad rectum. ergo ut rectangulum f l h ad quadratum l k, ita transuersum latus ad rectum. ducatur à puncto a linea a t ad rectos angulos ipsi a b. & quoniam ut quadratum e a ad quadratum a t, ita est transuersum latus ad rectum: & ut transuersum latus K 33. tertii. 28. primi L M lem. in 22 decimi N O 92

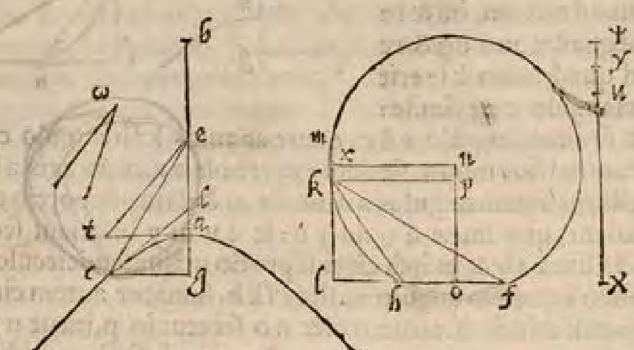


ad rectum, ita rectangulum flh ad quadratum lk: quadratum autem fl ad lk quadratum maiorem proportionem habet, quàm rectangulum flh ad quadratum lk:
8. quinti. P habebit quadratum fl ad quadratum lK maiorem proportionem, quàm quadratum ea ad quadratum at. & sunt anguli ad al recti: angulus igitur f angulo e minor erit.
Q Itaque constituatur angulus aec æqualis angulo lfk. ergo linea ec sectioni occurret. occurrat in puncto c: & à c ducatur cd contingens sectionem; & cg perpendi-
37. primi huius. cularis. erit ut transuersum latus ad rectum, ita rectangulum egd ad quadratum cg. Vt igitur rectangulum flh ad quadratum lk, ita rectangulum egd ad quadratum
R S cg: ideoq; triangulum Kfl triangulo ceg est simile: & triangulum Khl simile triangulo cdg: & kfh ipsi ced. quare ecd angulus angulo fkh, hoc est ipsi ω est æqua-
T lis. si uero transuersi lateris ad rectum proportio sit æqualis ad æquale; linea kl cir-
V culum fkh continget: & à centro ad k ducta æquidistans erit fh: & ipsa problema efficiet.

FED. COMMANDINVS.

A ITAQVE proportio transuersi lateris ad rectum data est.] *Quoniam enim positione data est et asymptotos, si à puncto a ducatur ad rectos angulos ipsi ae linea at, quæ asymptoto in t occurrat; erit at data: & data proportio ea ad at. quare & proportio quadrati ea ad quadratum at; hæc autem eadem est, quæ transuersi lateris ad rectum, ex demonstratis in prima huius: quanquam data hyperbola, & latere eius transuerso, statim transuersi lateris ad rectum proportio data erit absque asymptotis: sunt enim asymptoti recto latere quodammodo posteriores. Sit hyperbole ca, cuius transuersum latus ab: & sumpto in sectione quouis puncto c, ducatur ad ba ordinatim linea cg. erit cg data: & data ag, & gb. quoniam igitur datæ sunt bg, ga, &*

29. dator. 1. 50. 30. prima datorum



lem. in 12 decimi 50. 8. datorum. *earum proportio dabitur, hoc est proportio rectanguli bga ad quadratum ga: estq; data cg. ergo & data proportio ag ad gc. & idcirco quadrati ag ad quadratum gc. proportio igitur rectanguli bga ad quadratum cg data erit, quæ est transuersi lateris ad rectum, ex uigesima prima primi huius.*

B Quare & data proportio rectanguli egd ad quadratum cg.] *Eadem enim est, quæ transuersi lateris ad rectum, ex trigesima septima primi huius.*

C Et in ipsa circuli portio describatur, suscipiens angulum æqualem angulo ω.] *Ex trigesima tertia tertij elementorum.*

D Quæ quidem portio semicirculo maior erit.] *Ex trigesima prima eiusdem tertij.*

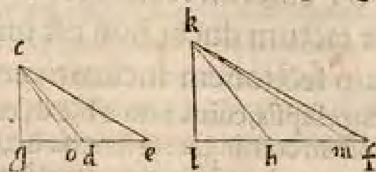
E Faciens proportionem rectanguli flh ad quadratum lk candem, quæ est transuersi lateris ad rectum.] *Quomodo hoc fiat, mox apparebit, in problematis compositione.*

F Est autem ut transuersum latus ad rectum, ita & rectangulum egd ad quadratum cg: & rectangulum flh ad quadratum Kl.] *Quare ex undecima quinti sequitur rectan-*
23. sexti. *gulum flh ad quadratum lK ita esse, ut rectangulum egd ad quadratum gc. proportio autem rectanguli flh ad quadratum lK componitur ex proportione fl ad lK, & proportione hl ad lK: & proportio rectanguli egd ad quadratum gc componitur ex proportione eg ad gc, & dg ad gc. ergo proportio composita ex proportionibus fl ad lK, & hl ad lK eadem est, quæ componitur*

ponitur ex proportionibus e g ad g c, & d g ad g c.

Erit triangulum k f l triangulo c e g simile: & triangulum f h K simile triangulo e d c.] Est enim f l ad l K, ut e g ad g c: quod postea demonstrabimus. Cum igitur circa æquales angulos l g latera proportionalia sint: triangulum f l K simile erit triangulo e g c. quare angulus ad f angulo ad c est æqualis: & angulus f K l angulo e c g. erat autem & f K h angulus æqualis angulo e c d. ergo & reliquus h K l reliquo d c g æqualis: & triangulum K f h simile triangulo c e d. Itémq; triangulum h k l triangulo d c g. G 6. sexti

At uero f l ad l k ita esse, ut e g ad g c, hoc modo demonstrabimus. si enim fieri potest, sit proportio f l ad l k maior, quàm e g ad g c: erit h l ad l K proportio minor, quàm d g ad g c, quoniam proportio composita ex proportionibus f l ad l k, & h l ad l K eadem est, quæ componitur ex proportionibus e g ad g c, & d g ad g c: quod supra ostensum est. Itaque fiat ut e g ad g c, ita m l ad l k. erit m l minor, quàm f l. Rursus fiat ut h l ad l k, ita o g ad g c. eadem ratione minor erit o g, quàm d g. Quoniam igitur m l ad l k eandem habet proportionem, quam e g ad g c: & sunt anguli ad l g recti inter se æquales: triangulum m l k triangulo e g c simile erit. rursus quoniam o g ad g c eandem proportionem habet, quam h l ad l k, erit & triangulum o g c simile ipsi h l k. angulus igitur e c g æqualis est angulo m K l: & angulus o c g æqualis angulo h k l. ergo reliquus e c o reliquo m k h æqualis erit. quod fieri non potest: ponebatur enim angulus e c d æqualis angulo f k h: & est angulus e c o maior angulo e c d. quare multo maior est angulo m K h. idem sequetur absurdum, si proportio f l ad l K ponatur minor, quàm e g ad g c. ex quibus constat f l ad l k eandem habere proportionem, quam e g ad g c. 8. quinti



Quare angulus k f l angulo c e d est æqualis.] Hunc locum nos ita correximus, in græco enim exemplari legebatur. ὥστε ἴση ἐστὶ ἡ ὑπὸ ξ κθ γωνία, τουτέστι ἡ ω τῇ ὑπὸ εγδ, hoc est, quare angulus f k h, uidelicet angulus ω angulo e c d est æqualis, & mendose, ut opinor. concluderet enim, quod antea posuerat: essetq; eadem conclusio in resolutione, & compositione problematis, quod est absurdum. H

Et asymptotos e t.] Hæc nos addidimus, quæ in græco exemplari non erant: sed tamen desiderari uidebantur. K

Propterea q; ut n p ad p o, hoc est ψ u ad u χ, ita x k ad k l.] Quoniam enim n x, p K æquidistant ipsi f h, & inter se æquidistabunt: æquidistant autem & n o, x l. quod utraque ad f h sit perpendicularis. quare n p k x, p o l k parallelogramma sunt. & ideo x K est æqualis n p, & k l ipsi p o. L 30. primi. 28 34. primi

Et antecedentium dupla, ut ψ u ad u χ, ita m k ad k l.] Nam cum sit ut y u ad u χ, ita x k ad K l: ut autem ψ u ad y u, ita m k ad x k, est enim & m K ipsius x K dupla, quoniam n x perpendicularis ad m K, ipsam bifariam diuidit, per tertiam propositionem tertij libri elementorum: erit ex æquali ut ψ u ad u χ, ita m k ad K l. M

Hoc est rectangulum f l h ad l k quadratum.] Rectangulum enim f l h est æquale rectangulo m l k, quòd utrumque sit æquale quadrato eius lineæ, quæ ab l ducta circulum contingit, ex 36. tertij elementorum. N

Ducatur à puncto a linea a t ad rectos angulos ipsi a b.] Linea a t in puncto a sectionem contingit, & asymptoto occurrit in t. ergo quadratum e a ad quadratum a t eam proportionem habet, quam transuersum latus ad rectum, ex ijs, quæ in prima huius demonstrantur. O

Habebit quadratum f l ad quadratum l k maiorem proportionem, quàm quadratum e a ad quadratum a t. & sunt anguli a l recti. angulus igitur f angulo e minor erit.] Quoniam enim quadratum f l ad quadratum l K maiorem proportionem habet, quàm quadratum e a ad quadratum a t, habebit linea f l ad l k maiorem proportionem, quàm e a ad a t. quare ex sexto lemmate Pappi angulus f angulo e minor erit. P

Ergo linea e c sectioni occurret.] Ex secunda huius. Q

Ideoq; triangulum k f l triangulo c e g est simile.] Nam angulus c e g factus est æqualis angulo f: & angulus g rectus æqualis est recto l. ergo & reliquus reliquo æqualis erit: & triangulum k f l triangulo c e g simile. R

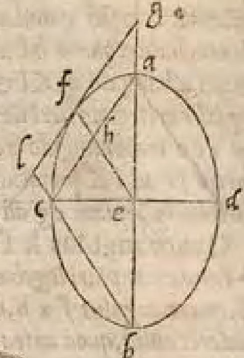
Et triangulum k h l simile triangulo c d g: & k f h ipsi c e d.] Constat hoc ex septimo S *lemmate Pappi.*

T Si uero transuersi lateris proportio sit æqualis ad æquale.] *Hoc est si transuersum latus sit æquale recto.*

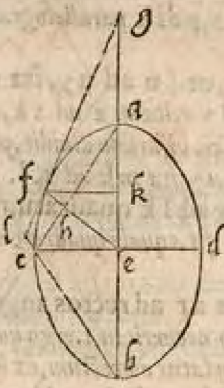
V Linea Kl circulum fkh continget: & à centro ad k ducta æquidistans erit fh.] *Si enim à centro n ad circumferentiam circuli ducatur linea* nk, *quæ ipsi* fh *æquidistet: & à* k *ad* fh *productam demittatur perpendicularis* kl; *linea* kl *circulum continget ex* 16. *propositione tertij elementorum, quoniam & ad ipsam* nk *est perpendicularis.*

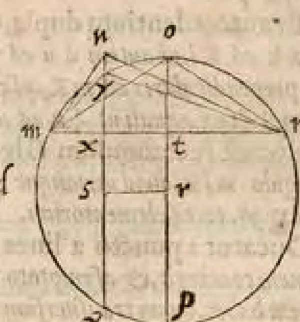
THEOREMA XLIIII. PROPOSITIO LII.

Si ellipsim recta linea contingat, angulus, quem facit cum diametro per tactum ducta, non est minor angulo deinceps ei, qui lineis ad mediam sectionem inclinatis continetur.



Sit ellipsis, cuius axes ab, cd, centrum e: & sit axium maior ab: linea uero gfl sectionem contingat: & iunctis ac, cb, fe, producatur bc ad l. Dico angulum lfe non esse minorem angulo lca. linea enim fe, uel est æquidistans ipsi lb, uel non æquidistans. Sit primum
1.sexti æquidistans: & est ae æqualis eb. ergo & ah ipsi hc est æqua-
5.huius lis. Sed fe diameter est. linea igitur, quæ in f sectionem contingit, ipsi ac est æquidistans. est autem & fe æquidistans lb. qua-
34.primi re parallelogrammum est fhcl. & idcirco angulus lfh æqualis
A est angulo lch. Quoniam igitur utraque ipsarum ae, eb est ma-
13.primi. ior ec, angulus acb est obtusus. ergo acutus angulus lch, &
B lfe: & propterea gfe obtusus erit. sed non sit ef æquidistans
C lb: & ducatur fk perpendicularis. non igitur angulus lbe æqualis est ipsi fea. rectus autem angulus ad e recto ad k est æqualis. ergo triangulum cbe non est simile triangulo fek: &
D ideo non est ut quadratum be ad quadratum ec, ita quadratum eK ad quadratum kf. Sed ut quadratum be ad quadratum ec, hoc est, ut rectangulum aeb ad quadratum ec, ita transuersum latus ad rectum: & rectangulum gke ad quadratum kf. ergo linea gK non est æqualis ipsi ke.





Exponatur circuli portio mφn, suscipiens angulum æqualem angulo acb.
31.tertii. angulus autem acb est obtusus. ergo circuli portio mφn est semicirculo minor. fiat igitur ut gk ad ke, ita nx ad xm: & per x ad rectos angulos ipsi mn ducatur yxχ: & my, yn iun-
E gantur. secetur autẽ mn bifariam in t. & ad rectos angulos ducatur otp. erit otp diameter. sit r circuli centrum, à quo perpẽdicularis ducatur rs; & iun-
F gãtur mo, on. itaq; angulus mon est æqualis angulo acb: & utraque ipsarum ab, mn in punctis et bifariam secatur: suntq; anguli ad e, t, recti. triangula igi-
G tur otn, ceb inter se similia erunt. ergo ut quadratum nt ad quadratum to, ita qua-
8.quinti. dratum be ad ec quadratum. & cum tr sit æqualis sx, & ro maior, quam sy; ha-
30.quinti bebit or ad rt maiorem proportionem, quàm ys ad sx. & per conuersionem ratio-
H nis ro ad ot minorem proportionem habebit, quàm sy ad yx: & antecedentium
29.quinti dupla po ad ot minorem habebit, quàm χy ad yx: diuidendoq; pt ad to mino-
K rem, quàm χx ad xy. sed ut pt ad to, ita quadratum tn ad quadratum to; & quadratum be ad quadratum ec; & transuersum latus ad rectum; & rectangulum gke ad quadratum kf. ergo rectangulum gke ad quadratum kf minorẽ habet propor-

tionem,

tionem, quàm χx ad xy, hoc est quàm rectangulum χxy ad quadratum xy; hoc est rectangulum nxm ad quadratum xy. si igitur fiat, ut rectangulum gke ad quadratum kf, ita rectangulum nxm ad aliud quoddam: erit illud maius quadrato xy. sit quadratum xu. Itaque quoniam ut gk ad ke, ita nx ad xm: & sunt kf, xu ad rectos angulos: & ut rectangulum gke ad quadratum kf, ita rectangulum nxm ad quadratum xu: erit angulus gfe æqualis angulo num. ergo maior est angulus nym, hoc est acb angulo gfe. qui uero deinceps est, uidelicet lfh est maior angulo lch. non igitur angulus lfh angulo lch minor erit.

22. decimi
35. tertii.
8. quinti.
L

FED. COMMANDINVS.

A Quoniam igitur utraque ipsarum ae, eb est maior ec; angulus acb est obtusus.] *Si enim ex centro e, & interuallo ea describatur circulus aqb: & producatur ec usque ad eius circumferentiam in q: iunganturq; aq, qb: erit angulus aqb rectus. quare acb est obtusus.* 31. tertii

B Ergo acutus angulus lch & lfe: & propterea gfe obtusus erit.] *Hoc idcirco dixit, ut ex duobus angulis, quos diameter cum linea contingente efficit, acutum intelligamus, non obtusum, qui est ex parte g. hæc enim omnia sequenti problemati inseruire perspicuum est.* 21. primi

C Non igitur angulus lbe æqualis est ipsi fea.] *Quoniam enim lineæ bl, ef non sunt æquidistantes, si producantur, conuenient inter se se: atque erit angulus fek exterior quolibet interiore & opposito maior, ex 16. primi elementorum.*

D Et ideo non est ut quadratum bc ad quadratum ec, ita quadratum ek ad quadratum kf.] *Græcus codex corruptus est, quem nos ita restituimus.* οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ βε πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, τὸ ἀπὸ κε, πρὸς τὸ ἀπὸ κζ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ βε πρὸς τὸ ἀπὸ εγ τὸ ὑπὸ αεβ πρὸς τὸ ἀπὸ εκ, καὶ ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ τὸ ὑπὸ ηκε πρὸς τὸ ἀπὸ κζ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ηκ τῇ κε. *Sed tamen ante ea uerba.* οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ηκ τῇ κε, *uerisimile est non nulla desiderari in hanc sententiam. non igitur est, ut rectangulum gke ad quadratum Kf, ita quadratum eK ad quadratum kf. quare rectangulum gke quadrato Ke non est æquale. Hæc autem magis perspicua essent. si hoc modo explicarentur. ergo triangulum cbe non est simile triangulo fek, & ideo non est ut be ad ec, ita ek ad kf: neque ut quadratum be ad quadratum ec, ita quadratum ek ad quadratum Kf. sed ut quadratum be ad quadratum ec, hoc est ut rectangulum aeb ad quadratum ec, ita transuersum latus ad rectum: & ut transuersum latus ad rectum, ita rectangulum gke ad quadratum kf. non igitur ut rectangulum gke ad quadratum kf, ita est quadratum eK ad quadratum kf. quare rectangulum gke quadrato ke non est æquale. ut autem rectangulum gke ad quadratum kc, ita linea gk ad ke. ergo linea gk non est æqualis ipsi ke.*

4. sexti
22. sexti.
21. primi huius.
37. primi huius.

E Secetur autem mn bifariam in f.] *Non enim punctum x cadit in medio lineæ mn, quemadmodum neque k in medio ge, cum ostensum sit, gk non esse æqualem kc.*

F Itaque angulus mon est æqualis angulo acb: & utraque ipsarum ab, mn in punctis et bifariam secatur.] *Post ea uerba desiderari non nulla uidentur, cuiusmodi hæc sunt. quare angulus ton est æqualis angulo ecb. est enim angulus ton dimidius anguli mon, & ecb dimidius ipsius acb.*

G Et ro maior quàm sy.] *Est enim linea op maior, quàm yχ: & ut op ad yχ, ita ro dimidia op, ad sy dimidiam yχ. ergo ro maior erit, quàm sy.* 15. tertii.

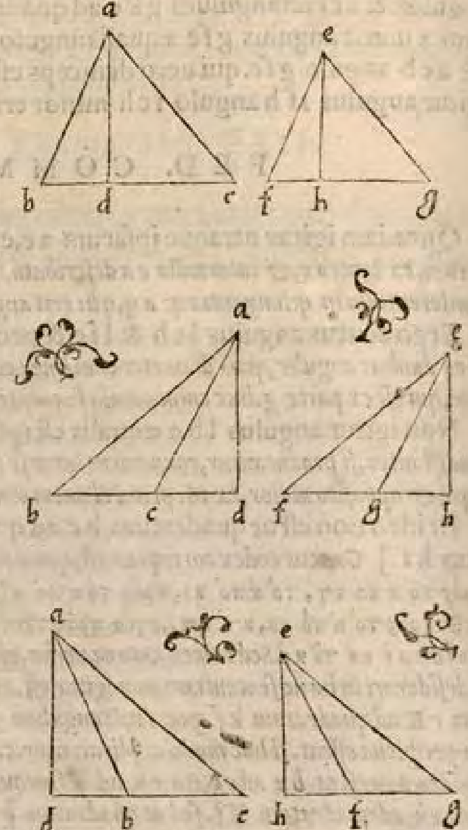
H Et antecedentium dupla po ad ot minorem habebit, quàm χy ad yx.] *Fiat ut ro ad ot, ita sy ad aliam, quæ sit yz. erit yz maior quàm yx. ut autem po, ad ro, ita χy ad sy. ex æquali igitur, ut po ad ot, ita χy ad yz. sed χy ad yz minorem habet proportionem, quàm ad yx. ergo & po ad ot minorem proportionem habebit, quàm χy ad yx.* 15. quinti 8. quinti

K Sed ut pt ad to, ita quadratum tn ad quadratum to.] *Ex corollario uigesimæ sexti, sunt enim tres lineæ pt, tn, to proportionales. ut autem quadratum tn ad quadratum to, ita quadratum be ad quadratum ec; hoc est rectangulum aeb ad quadratum ec, hoc est transuersum latus ad rectum: & ut transuersum latus ad rectum, ita rectangulum gKe ad quadratum kf. ergo ut pt ad to, ita rectangulum gKe ad quadratum Kf. & propterea rectangulum gke ad quadratum kf minorem proportionem habet, quàm χx ad xy.*

cor. 8 sexti.
21. 1. huius.
37 primi huius.

L Itaque quoniam ut gk ad ke, ita nx ad xm: & sunt kf, xu ad rectos angulos: & ut rectangulum gke ad quadratum kf, ita rectangulum nxm ad quadratum xu: erit angulus g f e æqualis angulo n u m.] *Illud uero nos hoc lemmate demonstrabimus, quoniam à Pappo demonstratum esse non apparet.*

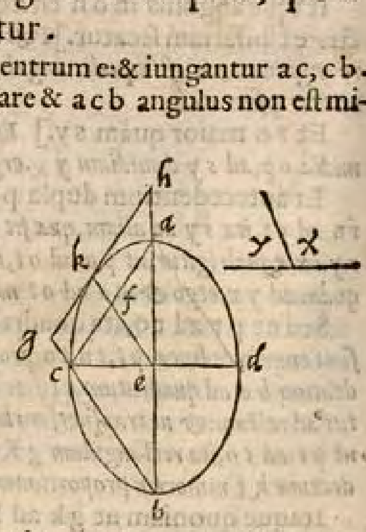
Sint triangula a b c, e f g: & ductis a d, e h perpendicularibus ad bases b c, f g, sit ut b d ad d c, ita f h ad h g: sitq; ut rectangulum b d c ad quadratum d a, ita f h g rectangulum ad quadratũ h e. Dico triangulum e f h triangulo a b d simile esse: triangulumq; e h g simile triangulo a d c, & triangulum e f g triangulo a b c. Quoniam enim est, ut b d ad d c, ita f h ad h g; & utiam ad d c, ita quadratum b d ad rectangulum b b d ut autem f h ad h g, ita quadratum f h ad d c: ctangulum f h g. ergo ut quadratum b d ad rectangulum b d c, ita quadratum f h ad rectangulum f h g. sed ut rectangulum b d c ad quadratũ d a, ita erat rectãgulum f h g ad quadratum h e. ex æquali igitur ut quadratum b d ad quadratum d a, ita quadratum f h ad quadratum h e. quare ut linea b d ad d a, ita linea f h ad h e: & eadem ratione demonstrabitur, ut linea c d ad d a, ita esse lineam g h ad h e. Cum igitur circa æquales angulos, uidelicet circa rectos, qui sunt ad d h, latera proportionalia sint: triangulum e h f simile erit triangulo a d b; & triangulum e h g triangulo a d c. quare angulus f e h æqualis est angulo b a d: et angulus h e g angulo d a c. angulus igitur f e g angulo b a c est æqualis: & est angulus e f g æqualis angulo a b c: & angulus e g f angulo a c b. ergo & triangulum e f g triangulo a b c simile erit. quod oportebat demonstrare.



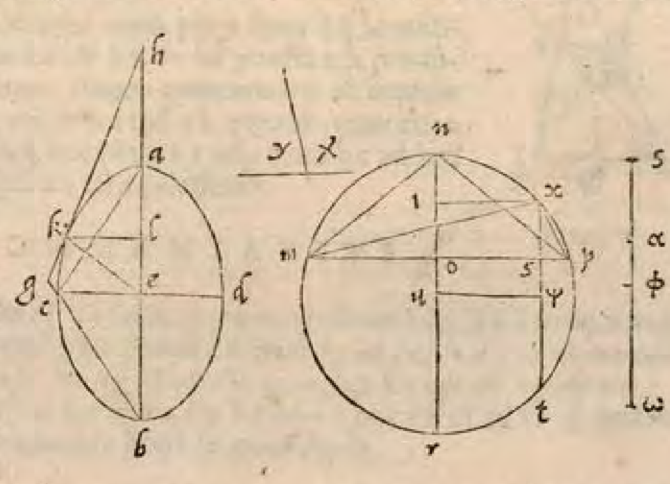
PROBLEMA IX. PROPOSITIO LIII.

Data ellipsi contingentem lineam ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto æqualem. oportet autem acutum angulum datum non esse minorem angulo deinceps ei, qui lineis ad mediam sectionem inclinatis continetur.

Sit data ellipsis, cuius maior axis a b; minor c d; & centrum e: & iungantur a c, c b.
A datus autem angulus sit y, non minor angulo a c g. quare & a c b angulus non est minor angulo χ. ergo angulus y uel est maior angulo a c g, uel ipsi æqualis. sitq; primum æqualis: & per e ducatur e k ipsi b c æquidistans: & per k contingens sectionem k h. Quoniam igitur a e est æqualis e b: & ut
1. sexti a e ad e b, ita a f ad f c: erit a f ipsi f c æqualis: & est K
5. huius. e diameter. ergo quæ in k sectionem cõtingit, hoc est h k g, æquidistat ipsi a c. sed & e K æquidistat b g. pa-
34. primi. rallelogrãmum igitur est k f c g: & ob id angulus g k e angulo g c f æqualis. angulus autem g c f est æqualis angulo dato y. ergo & g k e angulo y æquales erit. Sit deinde angulus y maior angulo a c g. erit contra angulus χ minor a c b angulo. Exponatur circulus; & ab eo auferatur portio m n p, suscipiens angulum æqualem angulo χ: & m p bifariam secta in o, & per o ducatur n o r ad rectos angulos



los ipſi m p; & iungantur m n, n p. angulus igitur m n p minor eſt angulo a c b: anguli autem m n p dimidius eſt angulus m n o: & anguli a c b dimidius eſt a c e. ergo m n o angulus angulo a c e eſt minor: & qui ad e o anguli recti ſunt. quare linea a e ad e c B
maiorem proportionem habet, quàm m o ad o n: & ideo quadratum a e ad e c quadratum maiorem habet proportionem, quàm quadratum m o ad quadratum o n. Sed quadratum a e æquale eſt rectangulo a e b: & quadratum m o æquale rectangulo m o p, hoc eſt ipſi n o r. ergo rectangulum a e b ad quadratum e c, hoc eſt tranſuerſum 35. tertii.
latus ad rectum, maiorem proportionem habet, quàm rectangulum n o r ad quadra- C
tum o n; hoc eſt quàm linea r o ad o n. Itaque fiat ut tranſuerſum latus ad rectum, ita lem. in 22
ωα ad ας: & ως bifariam ſecetur in φ. Quoniam igitur tranſuerſum latus ad rectum decimi
maiorem proportionem habet, quàm r o ad o n: habebit & ωα ad ας maiorē proportionē quàm r o ad o n: & componendo ως ad ςα maiorem habebit, quàm r n ad n o. 28. quīti
ſit u circuli centrum. ergo apud. Cā.
φς ad ςα maiorem habet proportionem, quàm u n ad n o: diuidendoq; φα ad ας maio- D
rem habet, quàm u o ad o n. fiat ut φα ad ας, ita u o ad minorem ipſa o n, hoc eſt ad o i. perq; i du- 29. quīti. apud. Cā.
catur i x ipſi m p æquidiſtans: & ducatur x s t æquidiſtans n r, & u ψ æquidiſtans eidem m p. E
erit igitur ut φα ad ας, ita u o ad o i & ψ s ad s x: componēdoq; ut φς F



ad ςα, ita ψ x ad x s: & antecedentium dupla, ut ως ad ςα, ita t x ad x s: & diuidendo, ut ωα ad ας, hoc eſt ut tranſuerſum latus ad rectum, ita t s ad s x. iungantur m x x p: & ad lineam a e, & ad e punctum conſtituatur angulus a e K æqualis angulo m p x: & per κ ducatur K h ſectionem contingens, & κ l ordinatim applicetur. Itaque quoniam angulus m p x æqualis eſt angulo a e k: & rectus angulus, qui ad s, eſt æqualis recto, qui ad l. erit triangulum x s p ſimile triangulo k l e; & ut tranſuerſum latus ad rectum, ita eſt t s ad s x, hoc eſt rectangulum t s x ad quadratum x s, hoc eſt lem. in 22 decimi
rectangulū m s p ad quadratum x s. ſimile igitur eſt triangulum h l κ triangulo m s x; 35. tertii.
& triangulum h κ e ſimile ipſi m x p: & propterea angulus m x p eſt æqualis angulo G
h κ e: eſt autem m x p angulus æqualis angulo m n p, hoc eſt angulo χ. quare & h k e angulus angulo χ eſt æqualis. angulus igitur deinceps g k e ei, qui deinceps eſt angulo y, æqualis erit. ergo ducta eſt linea g h ſectionem contingens, quæ cum diametro κ e per tactum ducta facit g k e angulum dato angulo y æqualem. quod feciſſe oportebat.

FED. COMMANDINVS.

Datvs autem angulus ſit y non minor angulo a c g. quare & a c b angulus non A
eſt minor angulo χ.] *Si enim angulus y ſit æqualis angulo a c g, & angulus χ angulo a c b æqualis erit: ſi uero y angulo a c g ſit maior, erit χ minor ipſo a c b. quare ſequitur angulum a c b non eſſe minorem angulo χ.*

Quare linea a e ad e c maiorem proportionem habet, quàm m o ad o n.] *Hoc* B
in undecimo lemmate Pappi demonſtratur.

Quàm rectangulum n o r ad quadratum o n.] *Hæc nos appoſuimus, quæ in græco* C
exemplari deeſſe uidebantur.

Ergo φς ad ςα maiorem habet proportionem, quàm u n ad n o.] *Quoniam enim* D
ως ad ςα maiorem proportionem habet, quàm r n ad n o: & antecedentium dimidia φς ad ςα habebit maiorem proportionem, quàm u n ad n o.

hoc idem ex [illegible]
[illegible] [illegible]
demonstrari potest
ut facit [illegible]
in [illegible] [illegible]

E Perq́; i ducatur i x ipsi m p æquidistans: & ducatur x s t æquidistans n r: & u ↓ æquidistans eidem m p.] *Hunc locum ita restituimus, nam in græco exemplari, ut opinor, nonnulla desunt.*

F Erit igitur ut φ α ad α ς, ita u o ad o i, & ↓ s ad s x.] *Est enim ↓ s æqualis u o, & s x æqualis o i, propterea quòd parallelogramma sunt o u ↓ s, o i x s.*

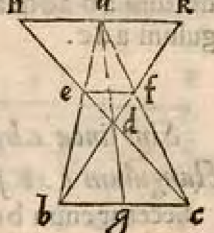
G Simile igitur est triangulum h l κ triangulo m s x, & triangulum h k e simile ipsi m x p.] *Hoc eodem modo demonstrabitur, quo usus est Pappus in septimo lemmate, nam rectangulum h l e ad quadratum l k est, ut transuersum latus ad rectum, hoc est ut rectangulum m s p ad quadratum s x.*

SECVNDI LIBRI FINIS.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA IN TERTIVM LIBRVM CONICORVM APOLLONII.

LEMMA PRIMVM.

SIt descripta figura abcdefg: & sit bg æqualis gc. Dico ef ipsi bc æquidistantem esse.



Ducatur enim per a linea hk æquidistans bc: & bf, ce ad puncta k h producantur. Itaque quoniam bg est æqualis gc; erit & ha ipsi ak æqualis. ergo ut bc ad ha, hoc est ut be ad ea, ita bc ad ka, hoc est cf ad fa. quare ef ipsi bc est æquidistans. A B 2. sexti

COMMENTARIVS.

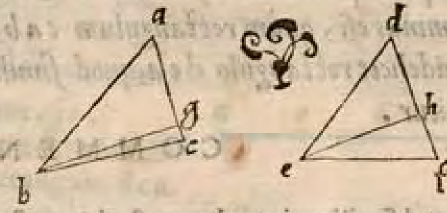
Erit & ha ipsi ak æqualis.] *Ob similitudinem triangulorum bdg, kda: itemq; triangulorum cdg, hda. est enim ut bg ad gd, ita ka ad ad: & ut dg ad gc, ita da ad ah. ex æquali igitur ut bg ad gc, ita ka ad ah. Sed bg est æqualis gc. ergo & ka ipsi ah æqualis erit.* A 14. quinti

Ergo ut bc ad ha, hoc est ut be ad ea, ita bc ad ka, hoc est cf ad fa.] *Sunt enim triangula similia bec, aeh: & triangula bfc, kfa itidem similia.* B

LEMMA II.

Sint duo triangula abc, def, quæ angulos a, d æquales habeant: & sit rectangulum bac æquale rectangulo edf. Dico triangulum triangulo æquale esse.

Ductis enim perpendicularibus bg, eh, erit ut bg ad ba, ita eh ad ed. ergo ut rectangulum ex bg & ac ad rectangulum bac, ita rectangulum ex eh & df ad rectangulum edf: & permutando ut rectangulum ex bg & ac ad rectangulum ex eh & df, ita rectangulum bac ad rectangulum edf. est autem rectangulum bac rectangulo edf æquale. ergo & rectangulum ex bg & ac æquale rectangulo ex eh & df. Sed rectanguli ex bg & ac dimidium est abc triangulum: & rectanguli ex eh & df dimidium triangulum def. triangulum igitur abc triangulo def æquale erit. Perspicuum autem est & parallelogramma ipsorum dupla inter se æqualia esse. 4. sexti. 1. sexti. 41. primi



COMMENTARIVS.

ERGO ut rectangulum ex bg & ac ad rectangulum bac, ita rectangulum ex eh & df ad rectangulum edf.] *Ex prima sexti. est enim rectangulum ex bg & ac ad rectangulum bac, ut bg ad ba, quòd eandem altitudinem habeant, uidelicet lineam ac; & similiter rectangulum ex eh & df ad rectangulum edf, ut eh ad ed. quare ex undecima quinti sequitur propositum.*

LEMMA III.

Sit triangulum a b c; & sit d e ipsi b c æquidistans. Dico ut quadratum a b ad quadratum a d, ita esse triangulum a b c ad triangulum a d e.

Quoniam enim triangulum a b c simile est triangulo a d e, ha-
19. sexti bebit a b c triãgulum ad ipsum a d e duplam proportionem eius,
20. sexti. quæ est b a ad a d. Sed & quadratum a b ad quadratum a d du-
11. quinti plam proportionem habet eius, quæ est b a ad a d. ergo ut quadratum a b ad quadratum a d, ita erit a b c triangulum ad triangulum a d e.

LEMMA IIII.

Sint lineæ a b, c d inter se æquales, & sumatur quoduis punctum e. Dico rectangulum c e b superare rectangulum c a b, rectangulo d e a.

Secetur enim b c bifariam in f. ergo punctum f lineam quoque a d bifariam secat.
6. secũdi. & quoniam rectangulum c e b unà cum b f quadrato æquale est quadrato e f. rectangulum autem d e a unà cum quadrato a f æquale est quadrato e f: atque est quadratum a f æquale rectangulo c a b unà cum b f quadrato: commune auferatur quadratum b f. reliquum igitur rectangulum c e b æquale est rectangulo c a b unà cum rectangulo d e a. quare c e b rectangulum superat rectangulum c a b, ipso d e a rectangulo. quod demonstrare oportebat.

COMMENTARIVS.

Commune auferatur quadratum b f.] *Sequitur enim ex iam dictis rectangulum c e b unà cum quadrato b f æquale esse rectangulis d e a, c a b unà cum quadrato b f.*

LEMMA V.

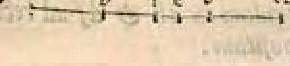
Si uero punctum e sit inter a & b, rectangulum c e b minus est, quàm rectangulum c a b, eodem ipso spatio, uidelicet rectangulo d e a, quod simili ratione demonstrabitur.

COMMENTARIVS.

6. secũdi 5. Quod simili ratione demonstrabitur.] *Est enim rectangulum c a b unà cum b f quadrato æquale quadrato a f; & rectangulum d e a unà cum quadrato e f æquale est quadrato a f. quadratum uero e f est æquale rectangulo c e b, unà cum b f quadrato. ergo rectangulum c a b unà cum quadrato b f æquale est rectangulis d e a, c e b unà cum quadrato b f. & dempto communi quadrato b f, relinquitur rectangulum c a b æquale rectangulis d e a, c e b. rectangulum igitur c e b minus est, quàm rectangulum c a b, rectangulo d e a.*

LEMMA VI.

Quòd si e punctum sit inter b & c, eadem ratione rectangulum c e b minus est, quàm rectangulum a e d, rectangulo a b d.

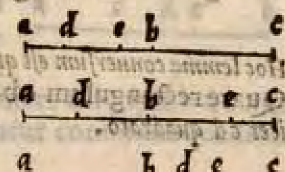


COMMENTARIVS.

Nam cum rectangulum a e d unà cum quadrato e f æquale sit quadrato a f: rectangulum uero a b d unà cum quadrato b f eidem quadrato a f sit æquale; & quadratum b f æquale rectangulo c e b unà cum e f quadrato: dempto communi quadrato e f, sequitur rectangulum a e d æquale esse rectangulo a b d unà cum rectangulo c e b. ergo c e b rectangulum minus est, quàm rectangulum a e d, rectangulo a b d. id quod demonstrandum proponebatur. 5. secūdi

LEMMA VII.

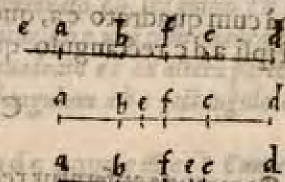
Sit linea a b æqualis ipsi b c: & duo puncta d e sumantur. Dico quadratum a b quater sumptum æquale esse rectangulo a d c bis unà cum rectangulo a e c bis, & quadratis d b, b e bis sumptis.



Hoc autem perspicuum est. quadratum enim a b bis sumptum propter bipartitas sectiones æquale est rectangulo a d c bis, & quadrato d b bis. Itemq; quadratum a b bis est æquale rectangulo a e c bis, & bis e b quadrato. 5. secūdi.

LEMMA VIII.

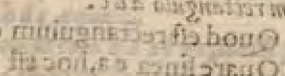
Sit linea a b æqualis ipsi c d: & sumatur punctum e. Dico quadrata a e, e d æqualia esse quadratis b e, e c, & rectangulo a c d bis sumpto.



Secetur b c bifariam in f. & quoniam quadratum d f bis sumptum æquale est rectangulo a c d bis, & bis quadrato c f: apposito communi quadrato e f bis; erit rectangulum a c d bis, unà cum quadratis c f, f e bis, æquale quadratis d f, f e bis sumptis. sed quadratis d f, f e bis sumptis æqualia sunt quadrata a e, e d. quadratis autem c f, f e bis sumptis æqualia sunt b e, e c quadrata. quadrata igitur a e, e d æqualia sunt quadratis b e, e c, & rectangulo a c d bis sumpto. 9. & 10. secundi.

LEMMA IX.

Sit rectangulum b a c unà cum c d quadrato æquale quadrato a d. Dico c d ipsi d b æqualem esse.



Commune enim auferatur quadratum c d. erit reliquum, quod continetur a c, d b æquale rectangulo d c a. æqualis igitur est d c ipsi d b.

COMMENTARIVS.

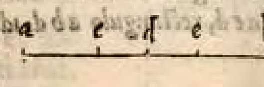
Hoc lemma est ueluti conuersum sextæ propositionis secundi libri elementorum, in cuius demonstratione cum non nulla desiderari uideantur, nos planius & apertius explicare tentabimus, hoc modo.

Commune auferatur quadratum c d. erit reliquum rectangulum b a c æquale rectangulo d c a, unà cum rectangulo d c a. est enim ex secunda propositione secundi libri elementorum quadratum a d æquale rectangulo d a c unà cum rectangulo a d c, hoc est unà cum rectangulo d c a, & quadrato c d ex tertia eiusdem. Sed ex prima rectangulum b a c æquale est rectangulo d a c unà cum eo, quod b d & a c continetur. quare rursus ablato communi rectangulo d a c, relinquitur rectangulum contentum b d & a c æquale rectangulo d c a. æqualis igitur est linea c d ipsi d b. 6. sexti

LEMMA X.

Sit rectangulum a c b unà cum quadrato c d æquale d b quadrato. Dico lineam a d æqualem esse d b.

Ponatur ipsi c d æqualis d e. ergo rectangulum c b e unà cum quadrato d e, hoc est quadrato c d, æquale est d b quadrato: hoc est rectangulo a c b unà cum quadrato c d. quare rectangulum c b e est æquale rectangulo a c b: & propterea linea a c æqualis ipsi e b. sed & c d æqualis est d e. tota igitur a d toti d b est æqualis.



e. sexti.

COMMENTARIVS.

Hoc lemma conuersum est quintæ propositionis secundi libri elementorum.

Quare rectangulum c b e est æquale rectangulo a c b.] *Nempe ablato communi uidelicet c d quadrato.*

LEMMA XI.

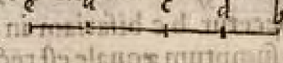
Sit rursus rectangulum b a c unà cum d b quadrato æquale quadrato a d. Dico lineam c d æqualem esse d b.

Ponatur enim ipsi d b æqualis a e. & quoniam rectangulum b a c unà cum quadrato d b, hoc est cum quadrato e a, æquale est quadrato a d:

A commune auferatur rectangulum d a c. ergo reliquum, quod b d & a c continetur, uidelicet rectangulum e a c

B unà cum quadrato e a, quod est rectangulum c e a, æquale

C est ipsi a d c rectangulo. quare linea e a, hoc est b d ipsi d c est æqualis.



COMMENTARIVS.

A Commune auferatur rectangulum d a c.] *Est enim rectangulum b a c æquale rectangulo d a c, unà cum eo, quod b d & a c continetur; quadratum uero a d æquale rectangulo d a c, unà cum rectangulo a d c.*

1. secūdi. 2. secūdi.

B Quod est rectangulum c e a.] *Ex tertia secundi libri elementorum.*

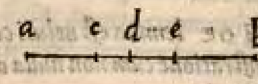
C Quare linea e a, hoc est b d ipsi d c est æqualis.] *Hoc nos demonstrauimus in commentarijs in sextam decimam secundi huius.*

LEMMA XII.

Sit recta linea a b, in qua sumantur tria puncta c d e, ita ut b e sit æqualis e c, & rectangulum a e d æquale quadrato c e. Dico ut b a ad a c, ita esse b d ad d c.

Quoniam enim rectangulum a e d æquale est quadrato

A B c e; erunt a e, ad e c, ita c e ad e d. quare per conuersionem rationis; antecedentibusq; bis sumptis; & diuidendo, ut b a ad a c, ita erit b d ad d c.



COMMENTARIVS.

Hoc lemma, & quod sequitur in græcis codicibus corruptissima erant, quæ nos ita restituimus.

A Erit ut a e ad e c, ita c e ad e d.] *Hæc nos addidimus perspicuitatis caussa, in græco enim*

a codice

codice tantum legitur ἀνάλογον.

Quare per conuersionem rationis, antecedentibusq; bis sumptis, & diuidendo, ut ba ad ac, ita erit bd ad dc.] *Quoniam enim ut ae ad ec, ita ce ad ed, erit per conuersionem rationis ut ea ad ac, ita ec ad cd; & antecedentium dupla, ut ba, ac ad ca, ita bc ad cd; est enim bc ipsius ce dupla. ergo diuidendo ut ba ad ac, ita est bd ad dc.* B

LEMMA XIII.

Sit rursus rectangulum bcd æquale quadrato ce, & ac ipsi ce æqualis. Dico rectangulum abe æquale esse rectangulo cbd.

Quoniam enim rectangulum bcd quadrato ce est æquale, ut bc ad ce, hoc est ad ca, ita erit ce, hoc est ac ad cd: & tota ad totam; & per conuersionem rationis: & spatium spatio æquale. ergo rectangulum abe æquale est A cbd rectangulo. Sed illud etiam constat, rectangulum scilicet ade ipsi bdc æquale esse, si enim à quadrato ce & à rectangulo bcd auferatur commune quadratum cd, quæ relinquentur æqualia erunt. B

COMMENTARIVS.

Et tota ad totam, & per conuersionem rationis: & spatium spatio æquale.] *Quoniam enim est ut bc ad ca, ita ac ad cd: erit componendo, ut tota ba ad ac, hoc est ad totam ec, ita pars ad ad partem dc. ergo reliqua bd ad reliquam dc, ut ba ad ac: & per conuersionem rationis db ad be, ut ab ad bc. rectangulum igitur abe rectangulo cbd est æquale.* A 19. quinti. 16. sexti.

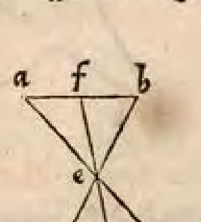
Sed hoc etiam aliter demonstrare possumus. nam cum linea ae bifariam secetur in c, atque ipsi addatur eb; erit rectangulum abe unà cum ec quadrato æquale quadrato cb. sed eidem cb quadrato æqualia sunt utraque rectangula cbd, bcd. rectangulum igitur abe unà cum quadrato ec æquale est rectangulo cbd unà cum rectãgulo bcd. quare sublato quadrato ec ex altera parte, & ex altera rectangulo bcd, quæ inter se æqualia sunt; sequitur rectangulum abe rectangulo cbd æquale esse. 6. secundi. 2

Sed illud etiam constat, rectangulum scilicet ade ipsi bdc æquale esse.] *Cum enim ac sit æqualis ce, rectangulum ade unà cum cd quadrato æquale est quadrato ce. sed rectangulum bdc unà cum quadrato cd est æquale rectangulo bcd, hoc est quadrato ce. quare sublato communi quadrato cd, relinquitur rectangulum ade rectangulo bdc æquale.* B 5. secundi 3.

ALITER quoque idem demonstrari potest hoc pacto. Quoniam ut tota ba ad ec, ita est pars ad ad dc; erit & reliqua bd ad de, ut ad ad dc: & propterea rectangulum ade æquale rectangulo bdc. 16. sexti

LEMMA XIIII.

In duas æquidistantes ab, cd per idem punctum e tres lineæ ducantur aed, bec, feg. Dico ut rectangulum aeb ad rectangulum afb, ita esse rectangulum ced ad cgd rectangulum.



Hoc per compositam proportionem manifestum est. ut enim ae ad ed, ita est af ad dg: & ut be ad ec, ita fb ad gc: & componuntur ex his proportionibus spatia. constat igitur propositum. Sed licet & aliter demonstrare absque composita proportione hoc pacto. Quoniam enim ut ae ad eb, ita est de ad ec; erit rectangulum aeb ad quadratum eb, ut rectangulum dec ad quadratum ec. ut autem quadratum eb ad quadratum bf, ita quadratum ec ad cg quadratũ. quare ex æquali ut rectangulum aeb ad quadratum bf, ita rectangulum dec ad quadratum cg. sed ut quadratum bf ad rectãgulũ bfa, ita quadratum cg ad rectangulum cgd. ex æquali igitur ut rectangulum aeb ad rectangulum afb, ita rectangulum ced ad rectangulum cgd.

COMMENTARIVS.

Hoc per compositam proportionem manifestum est.] *Cum enim lineæ ab, cd inter se æquidistent, erit aef triangulum simile triangulo deg: & triangulum feb simile ipsi gec. quare ut ea ad af, ita ed ad dg: & ut eb ad bf, ita ec ad cg. proportio autem rectanguli aeb ad rectangulum afb componitur ex proportione ea ad af, & proportione eb ad bf: & proportio rectanguli ced ad rectangulum cgd componitur ex proportione ed ad dg, & proportione ec ad cg. quare cum proportiones ex quibus componuntur, eædem sint, sequitur rectangulum aeb ad afb rectangulum ita esse, ut rectangulum ced ad rectangulum cgd.*

APOLLONII PERGAEI CONICORVM LIBER III.

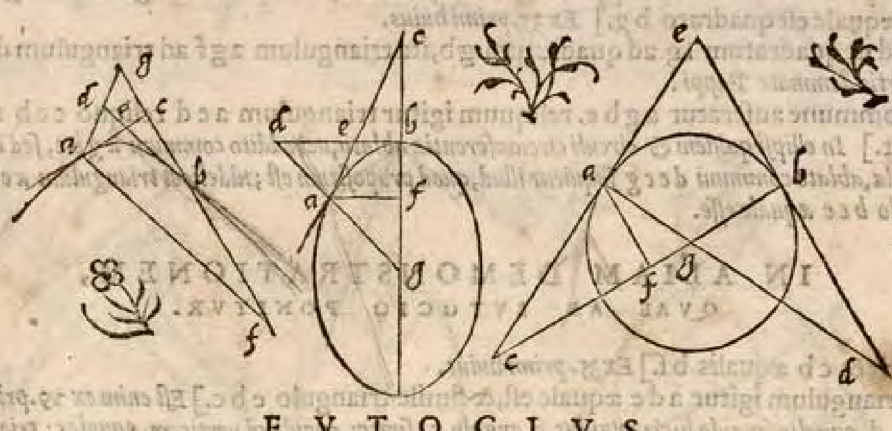
CVM COMMENTARIIS EVTOCII ASCALONITAE, ET FEDERICI COMMANDINI.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI coni sectionem, uel circuli circumferentiam rectæ lineæ contingentes inter se conueniant: & per tactus ducantur diametri, quæ cõtingentibus occurrant: triangula ad uerticem facta sibi ipsis æqualia erunt.

Sit coni sectio, uel circuli circumferentia a b; quam contingant rectæ lineæ a c, b d conuenientes in puncto e: & per tactus a, b diametri sectionis c b, d a ducantur, quæ contingentibus occurrant in punctis c d. Dico triangulum a d e triangulo c b c æquale esse. ducatur enim à puncto a linea a f ipsi b d æquidistãs, quæ ordinatim applicata erit: & in parabola quidem parallelogrammum a b d f æquale erit triangulo a c f. quare ablato communi a e b f, triangulum a d e, quod relinquitur, æquale est triangulo c b e. A + 46.47. p. k. + A 42. primi

In alijs uero conueniant diametri in centro g. & quoniam ordinatim applicata est a f: & a c sectionem contingit; rectangulum f g c æquale est quadrato b g. ut igitur f g ad g b, ita est b g ad g c. quare ut f g ad g c, ita quadratum f g ad quadratum g b. sed ut quadratum f g ad quadratum g b, ita triangulum a g f ad triangulum d g b: & ut f g ad g c, ita triangulum a g f ad triangulum a g c. ergo ut triangulum a g f ad triangulum a g c, ita triangulum a g f ad triangulum d g b. & propterea triangulum a g c triangulo d g b est æquale. Cõmune auferatur a g b e. reliquum igitur triangulum a e d reliquo c e b æquale erit. B 37. p. k. 14. sexti. 20. C 3. lem. Pappi 1. sexti 9. quinti D



EVTOCIVS.

Tertius conicorum liber, amicissime Anathemi, dignus ab antiquis existimatus est, in quem multum studij, ac diligentiæ conferretur: id, quod uariæ ipsius editiones ostendunt. sed neque epistolam habet, quemadmodum alij libri, neque commentarios in ipsum docti alicuius uiri ex ijs, qui ante nos fuerunt, quan quam in eo multa sint cõtemplatione dignissima; ut ipse Apollonius in proœmio totius libri asserit. omnia autem à nobis manifeste explicata sunt, ac demõstrata ex præcedentibus libris, Athemi

& commentarijs, quos in ipsos conscripsimus. Inuenitur etiam alia demonstratio, in parabola quidem, huiusmodi.

E Quoniam a c sectionem contingit, & ordinatim applicata est a f, erit & c b æqualis b f: & b f ipsi a d. ergo a d, c b inter se æquales sunt. sed & æquidistantes. triangulum igitur a d e æquale est, & simile triangulo e b c.] *In alijs uero hoc pacto.*

34. primi.

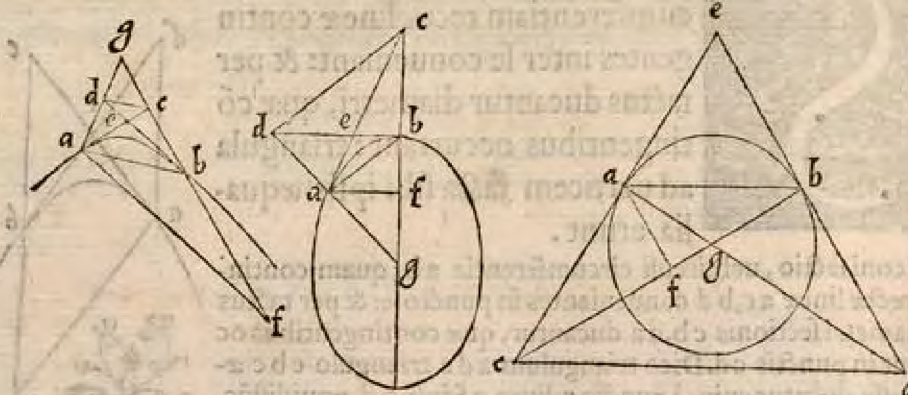
F

G H Iungantur a b, c d: & quoniam ut f g ad g b, ita est b g ad g c: & ut f g ad g b, ita a g

K ad g d: est enim a f ipsi d b æquidistans. ergo ut b g ad g c, ita a g ad g d: & propterea

L a b æquidistat ipsi c d. triangulum igitur a d c æquale est triangulo b d c: & com-

M muni c d e ablato, relinquitur triangulum a d e triangulo c b e æquale.



16

Hoc theorema in parabola quidem, & hyperbola non habet casus: in ellipsi uero, & circuli circumferentia duos habet: siquidem contingentes lineæ in tactibus dumtaxat diametris occurrunt: & ipsis productis uel occurrunt, sicuti in proposita figura, uel ad alteras partes, in quibus est e, quemadmodum & in hyperbola.

FED. COMMANDINVS.

A Et in parabola quidem parallelogrammum a b d f æquale erit triangulo a c f.] *Ex 42. primi huius.*

B Et quoniam ordinatim applicata est a f: & a c sectionem contingit: rectangulum f g c æquale est quadrato b g.] *Ex 37. primi huius.*

C Sed ut quadratum f g ad quadratum g b, ita triangulum a g f ad triangulum d g b] *Ex tertio lemmate Pappi.*

D Commune auferatur a g b e. reliquum igitur triangulum a e d reliquo c e b æqua le erit.] *In ellipsi quidem & circuli circumferentia ablato, uel addito communi a g b e, sed in hyperbola, ablato communi d e c g sequitur illud, quod propositum est; uidelicet triangulum a e d triangulo b e c æquale esse.*

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM, QVAE AB EVTOCIO PONITVR.

E Erit & c b æqualis b f.] *Ex 35. primi huius.*

F Triangulum igitur a d e æquale est, & simile triangulo e b c.] *Est enim ex 29. primi angulus d æqualis angulo b: & angulus a angulo c: suntq; anguli ad uerticem æquales: triangula igitur æqualia & similia erunt.*

G Et quoniam ut f g ad g b, ita est b g ad g c.] *Est enim rectangulum f g c æquale quadrato b g ex 37. primi huius.*

H Et ut f g ad g b, ita a g ad g d.] *Ex quarta sexti, quòd triangula a g f, d g b similia sunt.*

K Et propterea a b æquidistat ipsi c d.] *Nam cum sit a g ad g d, ut b g ad g c, erit permutando*

tando c g ad g d, ut b g ad g a: & sunt circa eosdem, uel æquales angulos latera proportionalia. ergo triangulum c g d simile est triangulo b g a: & angulus g d c angulo g a b æqualis. linea igitur d c lineæ a b est æquidistans. sed illud etiam possumus ex primo lemmate Pappi demonstrare. iuncta enim g e lineam a b bifariam secabit ex 30. secundi libri huius. quare & ipsam c d, ex demonstratis in sextam propositionem primi libri huius. 6. sexti. 18. primi

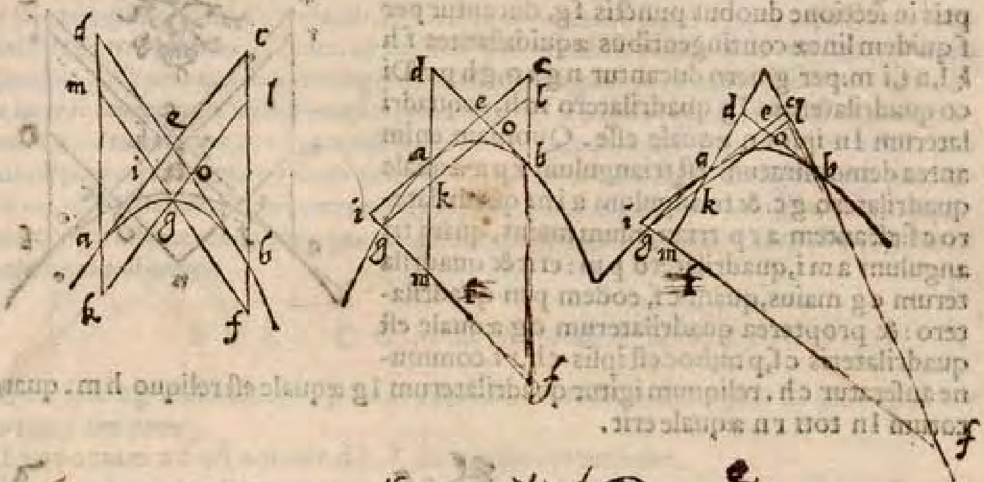
Triangulum igitur a d c æquale est triangulo b d c.] *Ex 37. primi elementorum.* L

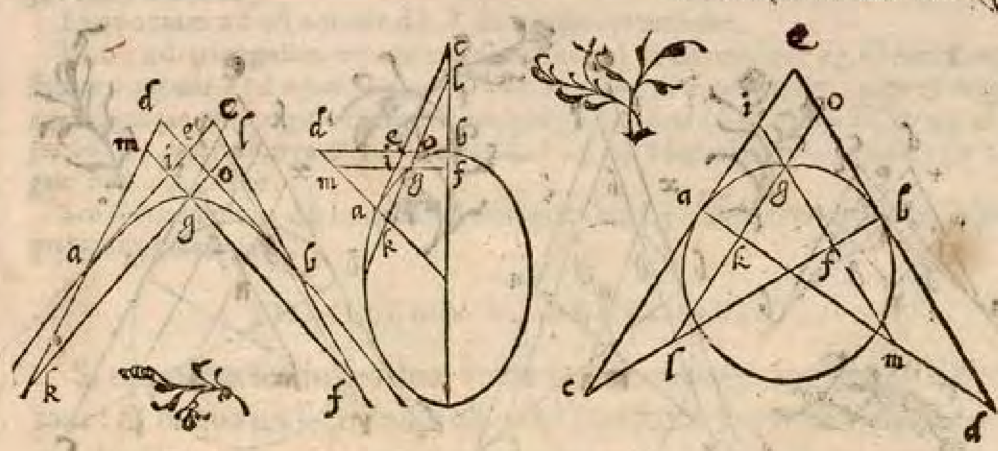
Et communi c d e ablato, relinquitur triangulum a d e triangulo c b e æquale.] M
Verum est hoc in hyperbola quidem semper, in ellipsi uero & circuli circumferentia in uno tantum casu. nam in altero casu ablato communi c g d, & communi a e b addito, sequitur triangulum a d e æquale esse triangulo c b e.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Iisdem positis si in coni sectione, uel circuli circumferentia sumatur aliquod punctum: & per ipsum æquidistantes contingentibus usque ad diametros ducantur: quadrilaterum factum ad unam contingentium, & ad unam diametrorum, æquale erit triangulo, quod ad eandem contingentem, & ad alteram diametrum constituitur.

Sit coni sectio, uel circuli circumferentia a b, quã contingant rectæ lineæ a e c, b e d: & diametri sint a d, b c sumpto autem in sectione puncto g, ducantur g k l, g m f contingentibus æquidistantes. Dico triangulũ a i m æquale esse quadrilatero c l g i. Quoniam enim ostensum est g k m triangulum æquale quadrilatero a l; commune apponatur, uel auferatur quadrilaterũ i k. ergo triangulũ a i m quadrilatero c g est æquale. + in 49. et 50. p^mi^

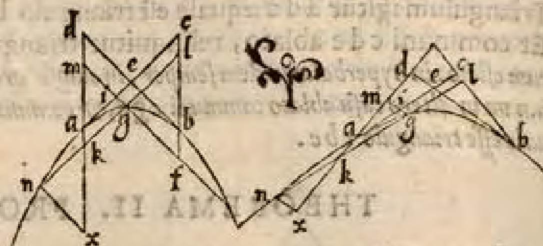




EVTOCIVS.

Casus huius theorematis inueniuntur per quadragesimum secundum, & quadragesimum tertiũ theorema primi libri, & per commentarios, quos in ea conscripsimus. oportet autem scire, si punctum g inter a b sumatur, ita ut æquidistantes sint d e b, m g f, itemq; a e c, k g l, & protrahatur l k usque ad sectionem in n: & per n ducatur n x ipsi b d æquidistans: ex ijs, quæ tradita sunt in theoremate quadragesimo nono, & quinquagesimo primi libri, & in ipsis commentarijs: erit triangulum k n x æquale quadrilatero k c. sed triangulum k n x simile est triangulo k g m, cum m g æquidistans sit n x. est autem & æquale, quoniam linea contingens est a c, cui æquidistat g n: & diameter est m x: & n k æqualis k g. Quoniam igitur triangulum k n x æquale est quadrilatero k c, & triangulo k g m; communi ablato a g, reliquum triangulum a i m reliquo c g quadrilatero æquale erit.

18



THEOREMA III. PROPOSITIO III.

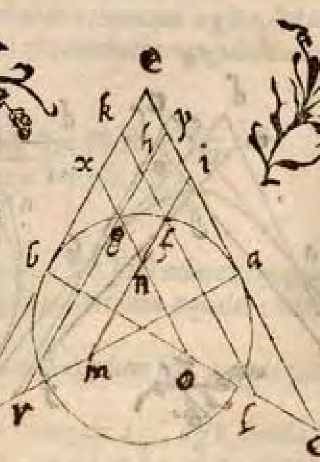
Iisdem positis si in coni sectione, uel circuli circumferentia duo puncta sumantur; & per ipsa ducantur æquidistantes contingentibus usque ad diametros: quadrilatera, quæ ab ipsis fiunt, in diametris constituta, inter se æqualia erunt.

Sit coni sectio, uel circuli circũferentia: lineæq; contingentes, & diametri, sicuti dictum est: & sumptis in sectione duobus punctis f g, ducantur per f quidem lineæ contingentibus æquidistantes f h k l, n f i m: per g uero ducantur n g x o, g h p r. Dico quadrilaterum l g quadrilatero m h, & quadrilaterum l n ipsi r n æquale esse. Quoniam enim antea demonstratum est triangulum r p a æquale quadrilatero g c. & triangulum a i m quadrilatero c f: est autem a r p triangulum maius, quàm triangulum a m i, quadrilatero p m: erit & quadrilaterum c g maius, quàm c f, eodem p m quadrilatero: & propterea quadrilaterum c g æquale est quadrilateris c f, p m; hoc est ipsis c h, r f. commune auferatur c h. reliquum igitur quadrilaterum l g æquale est reliquo h m. quare & totum l n toti r n æquale erit.

19

+in praeced:

20



EVTOCIVS.

Hoc theorema plures casus habet, quos ut in antecedente inueniemus. sed animaduertendum est duo puncta, quæ sumuntur, uel esse inter duas diametros, uel extra, & ad easdem partes. nam si alterum quidem extra sumatur, alterum uero inter diametros, non constituentur quadrilatera, de quibus in propositione dictum est: sed neque ad utrasque diametrorum partes constituentur.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes inter se conueniant; & per tactus ducantur diametri contingentibus occurrentes: triangula, quæ ad contingentes constituuntur, sibi ipsis æqualia erunt.

Sint oppositæ sectiones a, b, quas contingant rectæ lineæ a c, b c in puncto c conuenientes: sitq; sectionum centrum d: & iunctis a b, c d producatur c d usque ad e iungantur etiam a d, b d, & ad f g producantur. Dico triangulum a g d æquale esse triangulo b d f: & a c f triangulum triangulo b c g. Ducatur enim per h contingens sectionem h l, quæ ipsi a g æquidistabit. & quoniam a d æqualis est d h, erit a g d triangulum æquale triangulo h l d. sed & triangulum d h l æquale est triangulo b d f. ergo & triangulum a g d triangulo b d f. & propterea triangulum a c f ipsi b c g est æquale.

+ A 4B 44.30.p.
+ C
+ D 1.h.

EVTOCIVS.

In propositione huius theorematis, & eorum quæ sequuntur, oportet scire, Apollonium indeterminate dicere oppositas sectiones. & nonnulli quidem codices habent duas contingentes in una sectione: nonnulli uero non duas contingentes in una, sed singulas in utraque sectione contingentes, quæ inter se conuenerint (uti dictum est in secundo libro) in angulo, qui deinceps est angulo asymptoton. & ita eueniunt ea, quæ in propositione dicuntur. licet autem iis, qui uolunt hoc ex descriptionibus considerare. quanquam si unam quidem sectionum duæ rectæ lineæ contingant, quæ per punctum in quo conueniunt, & per centrum ducitur linea transuersa diameter est: si uero utranque sectionem singulæ lineæ contingant; quæ per dictum punctum & centrum ducitur, recta est diameter oppositarum sectionum. propos. 32

FED. COMMANDINVS.

Quæ ipsi a g æquidistabit.] *Ex iis, quæ ab Eutocio demonstrata sunt in quadragesimam quartam primi huius.* A

Et quoniam a d est æqualis d h.] *Ex trigesima primi huius.* B

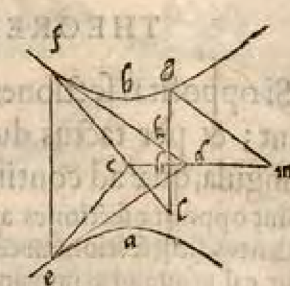
Erit a g d triangulum æquale triangulo h l d.] *Nam cum lineæ a g, h l inter se æquidistent, erit angulus a g d æqualis angulo h l d: & anguli qui ad d æquales sunt; quare & reliquus æqualis reliquo & triangulum triangulo simile. ut igitur a d ad d h, ita g d ad d l, & a g ad h l. sed a d est æqualis d h. ergo & g d æqualis d l, & a g ipsi h l: & idcirco triangulum a g d triangulo h l d æquale erit.* C 29 primi. 15

Sed & triangulum d h l æquale est triangulo b d f.] *Demonstratum est hoc in prima propositione huius libri.* D

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occurrant: & in qua uis sectionum aliquod punctum sumatur, à quo ducantur duæ lineæ, una quidem contingenti æquidistans, altera uero æquidi ſtans ei, quæ tactus coniungit: triangulum, quod ab ipſis cõſtituitur ad diametrum per occurſum ductam, à triangulo, quod eſt ad occurſum contingentium, differt triangulo facto ad contingentem & ad diametrum, quæ per tactum ducta fuerit.

Sint oppoſitæ ſectiones a b, quarum centrum c; & lineæ contingentes ſint e d, d f, quæ ſibi ipſis occurrant in d iunctaq; e f & c d; ac producta, iungantur f c, e c, & producantur: in ſectione autem ſumatur aliquod punctum g; per quod ducatur g k h l æquidiſtans e f, & g m æquidiſtans d f. Dico triangulum



A g h m a triangulo h k d differre triangulo k l f. Quoniã enim oſtenſa eſt c d diameter oppoſitarum ſectionum: & e f ad ipſam ordinatim applicatur: & g k h l quidem

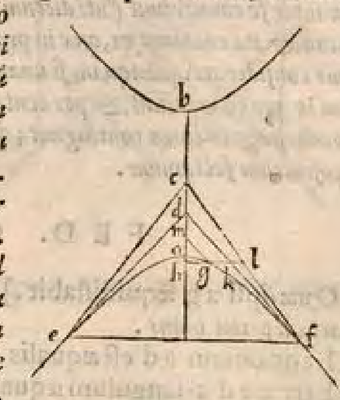
B ducitur æquidiſtans e f; m g uero æquidiſtans d f: triangulũ m g h à triangulo c l h differt triangulo c d f. quare m g h triangulum à triangulo K h d differt triangulo K f l.

Conſtat igitur triangulum K f l quadrilatero m g K d æquale eſſe.

EVTOCIVS.

Quintum theorema manifeſtum eſt. Verum in figura quidem, quæ unam diametrum habet, uidelicet rectam ita dicemus. Quoniam oſtenſum eſt triangulum g h m maius eſſe, quàm triangulũ c l h, triangulo c d f; erit triangulum g h m triangulo c h l, & triangulo c d f æquale. ergo & æquale triangulo K d h unà cum triangulo f l K. triangulum igitur g m h à triangulo k d h differt triangulo K l f. commune auferatur triangulum h d K. quare reliquum k l f triangulum æquale eſt quadrilatero K d m g.

In figura uero, quæ tranſuerſum diametrum habet, hoc modo. Quoniam prius demonſtratum eſt c l h triangulum maius eſſe, quàm triangulum m h g, triangulo c d f; erit c h l triangulum æquale triangulo h g m unà cum triangulo c f d. commune auferatur quadrilaterum c d k l. reliquũ igitur K h d triangulum æquale eſt triangulo h g m unà cum triangulo K l f. rurſus commune auferatur m h g. ergo triangulum K f l, quod relinquitur, quadrilatero g m d k æquale erit. Caſus habet plures, quos ex demonſtratis in quadrageſimo, & quadrageſimoquinto theoremate primi libri addiſcere oportet. Cum autem dicitur, auferatur, uel apponatur quadrilaterũ, uel triangulum, ablationes, & appoſitiones iuxta proprietatem caſuum faciemus. ſed quoniam ea, quæ ſequuntur, plures caſus continent ob punctorum ſumptiones, & æquidiſtantes lineas, ne confuſionem legentibus afferamus, multas figuras deſcribẽtes,



unam in ſingulis theorematibus faciemus, quæ oppoſitas ſectiones, & diametros, & lineas contingentes habeat; ut ſeruetur illud, quod in propoſitione dictum eſt. his poſitis & lineas æquidiſtantes, quouſque alijs occurrant, ducemus, in occurſu elementa collocantes, ita ut unuſquiſque ſeruans ea, quæ conſequuntur, facile poſſit caſus omnes demonſtrare.

FED. COMMANDINVS.

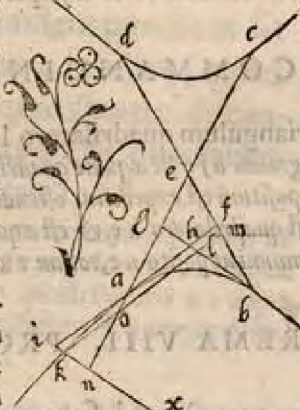
A Quoniam enim c d oſtenſa eſt diameter oppoſitarum ſectionum.] *Nam in primo caſu, cum ſcilicet duæ lineæ contingunt utramque ſectionem, erit c d diameter recta: quod elicitur ex trigeſima octaua & trigeſima nona ſecundi libri huius. In ſecundo autem caſu quando duæ lineæ alteram tantum ſectionem contingunt, diameter erit tranſuerſa, quod apparet ex uigeſima nona & trigeſima eiuſdem.*

Trian-

Triangulum m g h à triangulo c l h differt triangulo c d f.] *Cõstat hoc in primo casu ex quadragesima quinta primi huius. sed in altero casu hoc modo demonstrabitur. Iisdem enim manentibus, quæ in figura, à uertice sectionis linea a n ordinatim applicetur, quæ ipsam f c in puncto n secet. triangulum igitur m g h à triangulo c l h differt, triangulo c n a, ex quadragesima tertia primi huius. sed triangulum c d f triangulo c n a est æquale, ut ostensum est in quadragesima tertia primi libri huius, in secunda demonstratione, quæ ab Eutocio conscribitur. ergo triangulum m g h à triangulo c l h differt triangulo c d f.*

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

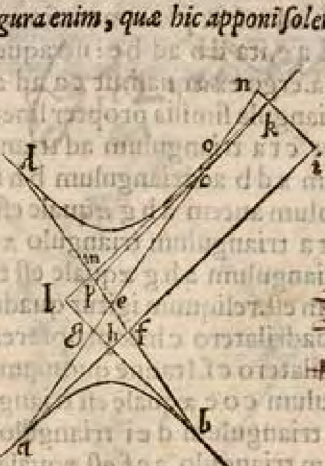
Iisdem positis si in una oppositarum sectionum aliquod punctum sumatur: & ab eo ducantur rectæ lineæ, contingentibus æquidistãtes, quæ & contingentibus, & diametris occurrant: quadrilaterum ab ipsis factum ad unam contingentium, & ad unam diametrorum, æquale erit triangulo, quod ad eandem contingentem, & ad alteram diametrum constituitur.



Sint oppositæ sectiones, quarũ diametri a e c, b e d: & sectionem a b contingant rectæ lineæ a f, b g conuenientes inter se in pũcto h: sumatur autem aliquod punctum k in sectione, à quo æquidistantes contingentibus ducantur k l m, k n x. Dico quadrilaterum k f æquale esse triangulo a i n. Quoniam enim oppositæ sectiones sunt a b c d: & sectionem a b contingit recta linea a f, ipsi b d occurrens: & ducta est k l æquidistans a f: triangulum a i n quadrilatero k f æquale erit.

FED. COMMANDINVS.

Triangulum a i n quadrilatero k f æquale erit.] *In figura enim, quæ hic apponi solet, uidelicet habente punctum k in sectione a b; quanquam ad secundam propositionem huius magis pertinere uideatur: sit punctum o, ubi linea K m diametrum a c secat. ergo ex iis, quæ demonstrata sunt in quinquagesima primi, uel ex secunda huius, triangulum k o n æquale est quadrilatero a o m f: & apposito communi a i k o, triangulum a i n quadrilatero k f est æquale. In prima uero earum, quas nos addidimus: quæ scilicet punctum k in sectione c d habet inter c & d: ducatur c o p sectionem contingens. erit triangulum c o n æquale quadrilatero k p:* 2. huius *& apposito communi o e, triangulum c p e, hoc est triangulum b g e,* 4. huius *hoc est a f e æquale quadrilatero k e.* 1. huius *rursus apponatur commune e i. triangulum igitur a i n quadrilatero k f æquale erit. sed in secunda figura, quæ punctum k habet in sectione d c extra c: triangulum k o n æquale est quadrilatero o p: & triangulum a e f æquale triangulo c p e. ergo communi f e o k i apposito, erit triangulum a i n quadrilatero k f æquale.*



THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Iisdem positis si in utraque sectione aliqua puncta sumantur: & ab ipsis ducantur lineæ contingentibus æquidistantes, quæ & contingentibus, & diametris occurrant: quadrilatera à lineis ductis constituta ad diametros, inter se æqualia erunt.

Ponantur enim eadem, quæ supra: & in utraque sectione puncta k l sumantur: per quæ ducantur m k p r χ, n s t l ω ipsi a f æquidistantes: & n i o k x, χ φ y l ψ æquidistantes b g. Dico ea euenire, quæ in propositione dicta sunt. nam cum triangulum a o i quadrilatero r o æquale sit, commune apponatur e o. erit totum triangulum a e f æquale quadrilatero k e. est autem & b g e triangulum quadrilatero l e æquale: & triangulum a e f triangulo b g e. ergo & quadrilaterum l e æquale est quadrilatero i k r e. commune apponatur n e. totum igitur t k toti i l: & k y ipsi r l æquale erit.

+ 2. huius. A

FED. COMMANDINVS.

A · Est autem & b g e triangulum quadrilatero l e æquale.] *Hoc nos demonstrauimus in antecedente, sed cum triangulum a f e sit æquale quadrilatero l e, quod etiam demonstrauimus, fortasse licebit illud, quod propositum est expeditius ostendere absque triangulo b g e. Quoniam enim triangulum a e f æquale est quadrilatero k e: & est æquale quadrilatero l e, erit & quadrilaterum l e ipsi k e æquale: & communi apposito n e, totum t k toti i l: & totum k y toti r l æquale erit.*

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Iisdem positis pro punctis k l, sumantur c d, in quibus diametri cum sectionibus conueniunt: & per ipsa contingentibus æquidistantes ducantur. Dico d g quadrilaterum quadrilatero f c: & quadrilaterum x i quadrilatero t o æquale esse.

A B 4. sexti Quoniam enim triangulum a g h ostensum est æquale triangulo b h f. & linea, quæ à puncto a ducitur ad b æquidistat lineæ à puncto g ad f ductæ: erit ut a e ad e g, ita b e ad e f. & per conuersionem rationis, ut e a ad a g, ita e b ad b f. est autem ut c a ad a e, ita d b ad b e: utraque enim utriusque est dupla. ergo ex æquali, ut c a ad a g, ita d b ad b f. & sunt C triangula similia propter lineas æquidistantes. ut igitur c t a triangulum ad triangulum a h g, ita triangulum x d b ad triangulum b h f: & permutando. triangulum autem a h g æquale est triangulo b h f. ergo & c t a triangulum triangulo x d b est æquale. quorum triangulum a h g æquale est triangulo b h f, ut ostensum est. reliquum igitur quadrilaterum d h est æquale quadrilatero c h: & propterea quadrilaterũ d g qua- D drilatero c f. Itaque quoniam c o æquidistat a f, triangulum c o e æquale est triangulo a f e. similiter autem E & triangulum d e i triangulo b e g. sed b e g triangulum triangulo a e f est æquale. ergo & triangulũ c o e triangulo d i e. estq; g d quadrilaterum æquale quadrilatero f c. totum igitur x i toti o t æquale erit.

FED. COMMANDINVS.

Quoniam enim triangulum a g h oſtenſum eſt æquale triangulo b h f.] *In 1. huius.* A

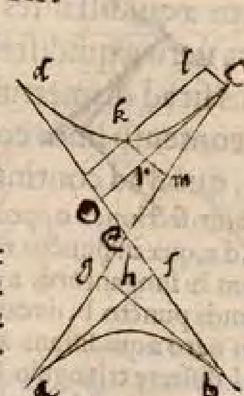
Et linea, quæ à puncto a ducitur ad b æquidiſtat lineæ à puncto g ad f ductæ.] *Hoc ex primo lemmate Pappi apparere poteſt.* B

Vt igitur c t a triangulum ad triangulum a h g, ita triangulum x d b ad triangulum b h f.] *Quoniam enim ut c a ad a g, ita eſt d b ad b f, erit ut quadratum c a ad quadratum a g, ita quadratum d b ad quadratum b f. ut autem quadratum c a ad quadratum a g, ita triangulum c t a ad triangulum g h a: quòd triangula ſimilia ſint: & eadem ratione ut quadratum d b ad quadratum b f, ita triangulum x d b ad triangulum h f b, ex tertio lemmate Pappi. ergo ut c t a triangulum ad triangulum g h a, ita triangulum x d b ad triangulum h b f.* C

Itaque quoniam c o æquidiſtat a f, triangulum c o e æquale eſt triangulo a f e.] *Sunt enim triangula c o e, a f e ſimilia: & eſt a e æqualis e c. quare ſequitur, ut & alia latera, & idcirco ipſa triangula inter ſe æqualia ſint.* D

Sed b e g triangulum triangulo a e f eſt æquale.] *Oſtenſum eſt hoc in prima huius.* E

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.



ISDEM poſitis, ſi alterum quidem punctum ſit inter diametros, ut K; alterum uero ſit idem, quod unum punctorum c d, ut c: & æquidiſtantes ducantur. Dico triangulum c e o æquale eſſe quadrilatero K e: & quadrilaterum l o æquale ipſi l m.

Illud uero perſpicuè apparet. nam cum demonſtratum ſit c e o triangulum æquale triãgulo a e f: triangulumq; a e f æquale quadrilatero K e: & triangulum c e o quadrilatero K e æquale erit. ergo & triangulum c r m quadrilatero K o: & quadrilaterum l m quadrilatero l o eſt æquale. A B C D

29

A + 4 (marginal handwriting)

FED. COMMANDINVS.

Nam cum demonſtratum ſit c e o triangulum æquale triãgulo a e f.] *In quarta huius.* A

Triangulumq; a e f æquale quadrilatero K e.] *Hoc nos ſupra demonſtrauimus in ſextam huius.* B

Ergo & triangulum c r m quadrilatero K o.] *Ablato nimirum communi quadrilatero o m. Atqui hoc prius per ſe patet ex ſecunda huius; linea enim c o ſectionem contingit: ex quo contra ſequitur, appoſito communi o m, triangulum c e o quadrilatero k e æquale eſſe.* C

Et quadrilaterum l m quadrilatero l o eſt æquale.] *Nam cum triangulum c e m æquale ſit quadrilatero K o, communi appoſito l r, erit l m quadrilaterum quadrilatero l o æquale.* D

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

ISDEM poſitis ſumantur K l, non tamen in punctis, in quibus diametri ſectionibus occurrunt. demonſtrandum eſt quadrilaterum l t r x quadrilatero ω x K i æquale eſſe.

30

Quoniam enim rectæ lineæ a f, b g ſectionem contingunt; & per tactus diametri a e, b e ducuntur; & ſunt l t, K i contingentibus æquidiſtantes: triangulum t y e maius eſt quàm triangulum y ω l, triangulo e f a. ſimiliter & triangulum x e i maius eſt, quàm triangulum x r K, triangulo b e g. ſed triangulum a e f æquale eſt triangulo b e g. quare eodem exceſſu & triangulum t y e excedit triangulum y ω l, & triangulum x e i A + 43. p. k. B

C excedit ipsum x r k. triangulum igitur t y e unà cum triangulo x r k æquale est triangulo x e i unà cum triangulo y ω l. commune apponatur k x e y l χ. ergo quadrilaterum l t r χ quadrilatero ω χ k i est æquale.

FED. COMMANDINVS.

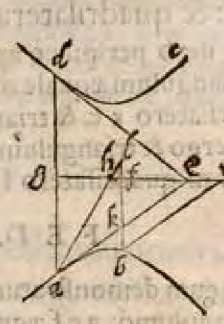
A Triangulum t y e maius est quàm triangulum y ω l, triangulo e f a.] *Ex quadragesima tertia primi huius.*

B Sed triangulum a e f æquale est triangulo b e g.] *Ex prima huius.*

C Triangulum igitur t y e unà cum triangulo x r k æquale est triangulo x e i unà cum triangulo y ω l.] *Hoc demonstrauit Eutocius in commentarijs in quadragesimam octauã 2. huius.*

THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

Iisdem positis si in quauis sectione punctum sumatur: & ab ipso lineæ æquidistantes ducantur; una quidem contingenti æquidistans; altera uero æquidistans ei, quæ tactus coniungit: triangulum, quod ab ipsis fit ad diametrum per occursum contingentium ductam, à triangulo contento linea contingente, & diametro per tactum, differt triangulo, quod ad contingentium occursum constituitur.

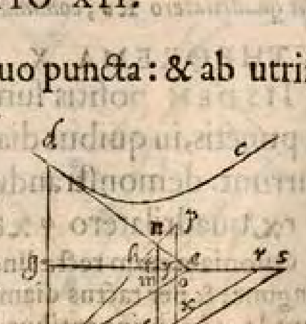


Sint sectiones oppositæ a b, c d: & lineæ contingentes a e, d e, quæ in puncto e sibi ipsis occurrant. sit autem centrum h: iunganturq; a d, & e h g: & sumpto in sectione a b quouis puncto b, ducatur b f l quidem ipsi a g æquidistans b m uero æquidistans a e. Dico triangulũ b f m à triangulo a k l differre triangulo k e f. lineam enim a d ab ipsa e h bifariam secari perspicuum est: & e h diametrum esse coniugatã ei, quæ per h ducta ipsi a d æquidistat. quare a g applicata est ad e g. Quoniam igitur g e diameter est; lineaq; a e sectionem contingit: & applicata est a g. sumpto autem in sectione puncto b; ad e g applicatur b f, ipsi a g æquidistans; & b m æquidistans a e triangulum b m f à triangulo l h f differt triangulo h a e. ergo b m f triangulum à triangulo a k l differt κ f e triangulo. 45. primi huius.

Coroll. Constat igitur quadrilaterum b κ e m triangulo l κ a æquale esse.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

Iisdem positis si in una sectione sumantur duo puncta: & ab utrisque similiter æquidistantes ducantur: quadrilatera ab ipsis constituta inter se æqualia erunt.

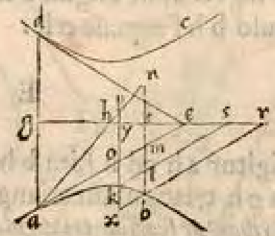


Sint eadem, quæ supra: & in sectione a b sumantur quæuis puncta b, κ; à quibus ducantur lineæ b l m n, k x o y p ipsi a d æquidistantes: itemq; b x r, k l s æquidistantes a e. Dico quadrilaterum b p æquale esse quadrilatero k r. Quo-

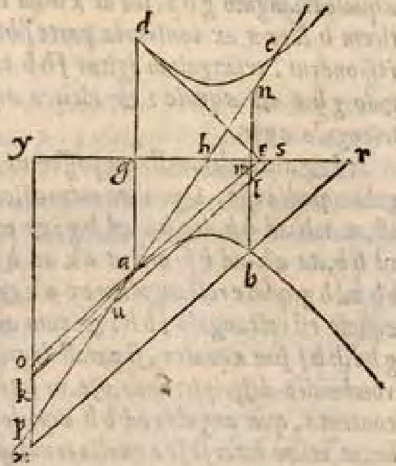
A niam enim demonstratum est triangulum a o p æquale quadrilaterò κ o e s; & triangulum a m n æquale quadrilatero b m e r: erit reliquum k r deficiens quadrilatero b o, uel ipsum assumens, æquale quadrilatero m p: & communi apposito, uel ablato b o, quadrilaterum b p quadrilatero x s æquale erit.

FED. COMMANDINVS.

A Quoniam enim demonſtratum eſt, triangulum a o p æquale quadrilatero κ o e s: & triangulum a m n æquale quadrilatero b m e r] *Demonſtratur hoc in antecedente. triangulum namque k s y maius eſt, quàm triangulum p h y, triangulo h a e, ex quadrageſima quinta primi huius. ſed triangulũ a p o unà cum triangulo y o e æquale eſt triangulo p h y unà cum triangulo h a e. quare ſequitur triangulum k s y maius eſſe, quàm triangulum a o p, triangulo y o e: & dempto communi y o e, reliquum a o p triangulum quadrilatero k o e s eſt æquale. Rurſus linea b n ſecet diametrum e h in puncto t. erit triangulum b r t maius, quàm triangulum n h t, triangulo h a e. triangulum autem a m n unà cum ipſo e t m æquale eſt triangulo n h t unà cum h a e. ergo triãgulum b r t maius erit, quàm triangulum a m n, triãgulo e t m: & dempto communi triangulo e t m, quod relinquitur triangulum a m n quadrilatero b m e r æquale erit. Itaque in prima figura, cum triangulum a o p excedat triangulum a m n, quadrilatero m p: & quadrilaterum κ o e s excedat b m e r quadrilatero κ r, dempto tamen ex eo prius quadrilatero b o: ſi ipſum b o quadrilaterum utrinque apponatur, erit quadrilaterum κ r, hoc eſt x s quadrilatero b p æquale. In ſecunda uero figura triangulum a m n excedit triangulum a o p, quadrilatero m p: & quadrilaterum b m e r excedit k o e s, quadrilatero k r, dempto tamen ex eo quadrilatero b o. quare b o utrique addito, erit quadrilaterum k r æquale quadrilatero l p. Denique in tertia figura, quoniam triangulum a o p eſt æquale quadrilatero k o e s, dempto communi k o a u, reliquum triangulum u k p æquale erit quadrilatero u a e s. eſt autem triangulo a m n æquale quadrilaterum b m e r. triangulum igitur u k p unà cum quadrilatero b m e r, æquale eſt triangulo a m n unà cum quadrilatero u a e s: & dempto ex utriſque communi l m e s, reliquum u κ p triangulum unà cum b l s r eſt æquale triãgulo a m n unà cum u a m l. Quòd ſi utriſque addatur commune x p u l b, erit quadrilaterum κ r æquale quadrilatero x p n b. ſimili ratione & alia eiuſmodi demonſtrare licebit.*



33



34

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

SI in oppoſitis ſectionibus, quæ coniugatæ appellantur, rectæ lineæ contingentes ſectiones, quæ deinceps ſunt, in unum punctum conueniant; & per tactus diametri ducantur: triangula, quorum communis uertex eſt ſectionum centrum, inter ſe æqualia erũt.

35

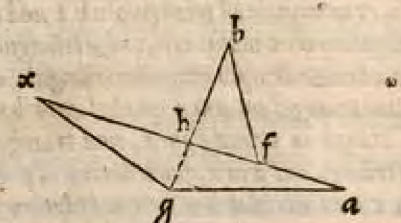
Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur a, b, c, d, & ſectiones a, b contingant rectæ lineæ a e, b e in puncto e conuenientes: ſit autem centrum h, & iunctæ a h, b h ad c d producantur. Dico b f h triangulum triangulo a g h æquale eſſe. ducantur enim per a, h lineæ a k, h l m ipſi b e æquidiſtantes. & quoniam b f e ſectionem contingit, & per tactum diameter eſt d h b duciturq; l m æquidiſtans b e; erit l m diameter coniugata ipſi 20 ſecũdi huius.

d b; quæ secunda diameter appellatur: & propterea a k ad b d ordinatim est applica-
38. primi huius. ta. contingit autem a g. ergo rectangulum k h g æquale est quadrato b h. & ut k h ad
h b, ita b h ad h g. sed ut k h ad h b, ita k a ad b f, & a h ad h f. ut igitur a h ad h f, ita
14. sexti. A b h ad h g. & sunt anguli b h f, g h f duobus rectis æquales. ergo a g h triangulum triangulo b h f æquale erit.

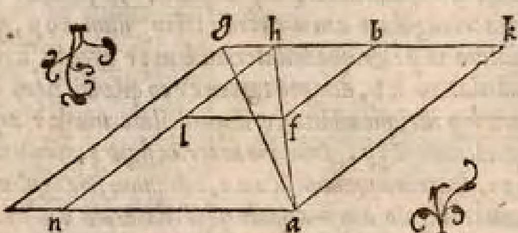
EVTOCIVS.

A Vt igitur a h ad h f, ita b h ad h g. & sunt anguli b h f, g h f duobus rectis æquales. ergo a g h triangulum triangulo b h f æquale erit.

Describantur seorsum triangula: & producta a h ad x, fiat ut g h ad h b, ita f h ad h x. Itaque
9. quinti *quoniam ut b h ad h g, ita est a h ad h f: erit a h ipsi h x æqualis. & propterea triangulum a g h*
1. sexti *æquale triangulo g h x. sed ut x h ad h f, ita b h ad h g. & circa æquales angulos, qui sunt ad verticem h latera ex contraria parte sibi ipsis*
36
15. sexti *respondent. triangulum igitur f h b triangulo g h x est æquale: & idcirco æquale triangulo a g h.*



Sed & aliter demonstrare possumus triangula æqualia esse. Quoniam enim ostensum est, ut k h ad h b, ita b h ad h g: & ut k h ad h b, ita a k ad b f: erit ut a k ad b f, ita
16. sexti. 29. primi *b h ad h g. quare rectangulum ex a k & h g æquale est rectangulo f b h. & cum anguli g h l, h b f sint æquales, si parallelogramma*
37
romboidea descripserimus, iisdem lateribus contenta, quæ angulos ad b h æquales habeant, etiam inter se se æqualia erunt, prop-
14. sexti *terea quòd latera ex cotraria parte sibi ipsis respondent: atque erit romboides f b h l in*
41. primi *angulo b trianguli h b f duplum; cuius quidem diameter est f h: romboides autem, quod continetur g h, & linea æquali a k, videlicet h l n in angulo g h n, duplum trianguli a g h. sunt enim in eadem basi g h, & sub eadem*
15. quinti *linea, quæ à puncto a ducitur ipsi g h æquidistans. triangulum igitur a g h triangulo f b h æquale esse manifesto constat.*

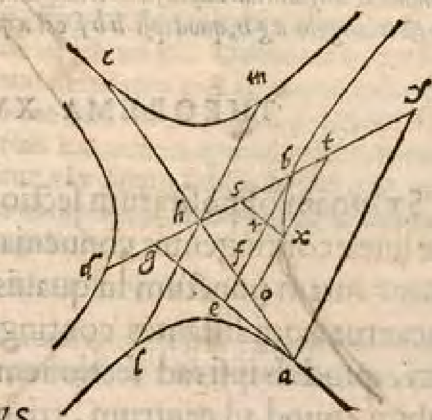


THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XIIII.

IISDEM positis, si in quauis sectione punctum sumatur: & ab ipso ducantur lineæ æquidistantes contingentibus usque ad diametros: triangulum, quod ad centrum constituitur, à triangulo circa eundem angulum differt triangulo basim habente lineam contingentem, & verticem sectionum centrum.

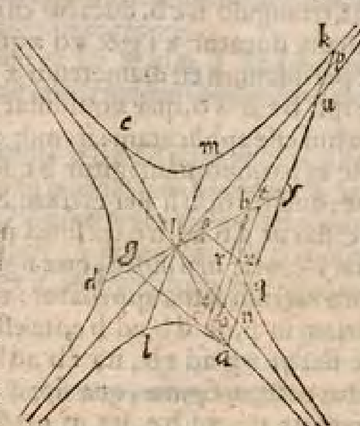
Sint alia quidem eadem; sumatur autem punctum in b sectione, quod sit x; & per ipsum ducatur x r s æquidistans a g; & x o t æquidistans b c. Dico triangulum o h t
A à triangulo x t s differre triangulo h b f. ducatur enim a puncto a linea a y ipsi b f æquidistans. quoniam igitur ex iis, quæ dicta sunt, sectionis a l diameter est l h m:
B C coniugata autem ipsi, & secunda diameter d h b: atque a puncto a ducitur a g sectionem contingens; & applicata est a y, quæ ipsi l m æquidistat: habebit a y ad y g proportionem compositam ex proportione h y ad y a: & ex proportione transuersi lateris figuræ, quæ fit ad l m ad latus rectum. sed ut a y ad y g, ita x t ad t s. & ut h y ad y a, ita

ya, ita ht ad to, & hb ad bf. ut autem figuræ, quæ ad lm, transuersum latus ad rectum, ita figuræ, quæ ad bd rectum latus ad transuersum. ergo xt ad ts proportionem habebit compositam ex proportione hb ad bf, hoc est ht ad to; & ex proportione recti lateris figuræ, quæ est ad bd, ad latus transuersum. quare per ea, quæ demonstrata sunt in quadragesimo primo theoremate primi libri, triangulum tho à triangulo xts differt triangulo bfh: & propterea triangulo agh. D E



FED. COMMANDINVS.

Quoniam igitur ex iis, quæ dicta sunt sectionis al diameter est lhm: coniugata autem ipsi, & secunda diameter dhb.] *Hoc ex uigesima propositione secundi libri Apollonij constare potest: sed tamen nos ex alijs demonstrare conabimur. Producatur enim ay usque ad sectionem cm in* k, *quæ sectionem b secet in punctis qu: conueniet enim ay cum utraque sectione al, cm in uno tantum puncto, quod in sexta decima secundi huius demonstratur: & erunt ay, y*k *inter se æquales ductis namque sectionum asymptotis nb, bp, linea an est æqualis p*k *ex sexta decima, quam diximus: & nq æqualis np, ex octaua eiusdem: sed & qy æqualis est yu, quod qu contingenti bc æquidistet. ergo ay, y*k *inter se æquales sunt. Itaque quoniam linea a*K *oppositas sectiones al, cm secat, non transiens per centrum: & à puncto ipsius medio y ad centrum b ducitur ybbd: erit ex trigesima septima secundi huius dbb oppositarum sectionum diameter, quæ recta appellatur; lbm uero, quæ æquidistat a*k, *transuersa ipsi coniugata. Potest etiam hoc ostendi ex quadragesima tertia eiusdem. nam cum linea qu sectionem b in duobus punctis secet: & per centrum b ad medium quidem lineæ qu ducta sit by: lbm uero ipsi æquidistans erunt lm, bd sectionum coniugatæ diametri: & idcirco sectionis al diameter est lm; & db ipsi coniugata, & secunda diameter.* A 47. primi huius.



39

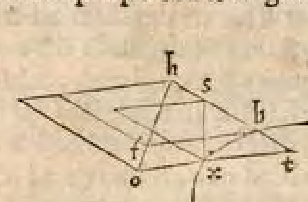
Et applicata est ay, quæ ipsi lm æquidistat.] *Applicatur enim ay ad diametrum db ordinatim, quoniam ut demonstrauimus, linea ak ab ipsa db bifariam secatur.* B

Habebit ay ad yg proportionem compositam ex proportione hy ad ya, & ex proportione transuersi lateris figuræ, quæ fit ad lm, ad latus rectum.] *Ex quadragesima primi huius: recta enim linea ag sectionem al contingens cum secunda diametro conuenit: & à puncto a ad eandem diametrum applicatur ay, alteri diametro lm æquidistans, ut ostendimus.* C

Vt autem figuræ, quæ ad lm transuersum latus ad rectum, ita figuræ ad bd rectum latus ad transuersum.] *Hoc ita esse nos demonstrauimus in commentarijs in uigesimam secundi huius.* D

Quare per ea, quæ demonstrata sunt in quadragesimo primo theoremate primi libri, triangulum tho à triangulo xts differt triangulo bfh: & propterea triangulo agh.] *Describantur enim à lineis xt, bb, bt parallelogramma æquiangula xts, bbf, bto in triangulorum angulis. & quoniam linea xt in sectione b ad diametrum ordinatim applicatur: habetq; xt ad ts proportionem compositam ex proportione bb ad bf: & proportione recti lateris ad transuersum: & est parallelogrammum bto simile parallelogrammo bbf, quod triangulum triangulo simile: erit ex quadragesima prima primi huius parallelogrammum bto maius, quàm parallelogrammum xts, parallelogrammo bbf. sed parallelo-* E

40

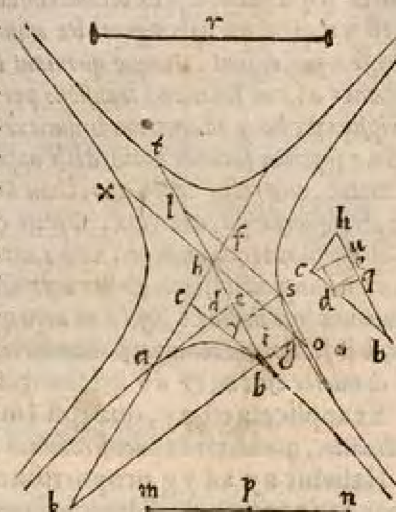


gramma triangulorum dupla sunt. triangulum igitur h t o à triangulo x t s differt triangulo h b f, hoc est triangulo a g h, quod ipsi h b f est æquale, ex antecedenti.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Si unam oppositarum sectionum, quæ coniugatæ appellantur, rectæ lineæ contingentes conueniant; & per tactus diametri ducantur: sumatur autem punctum in quauis sectionum coniugatarum: & ab ipso ducantur æquidistantes contingentibus usque ad diametros: triangulum, quod ab ipsis ad sectionem constituitur, maius est, quàm triangulum, quod ad centrum, triangulo basim habente lineam contingentem, & uerticem centrum sectionum.

Sint oppositæ sectiones, quæ coniugatæ dicuntur; a b, g s, t, x, quarum centrum h: & sectionem a b contingant a d e, b d c: & per tactus a b diametri a h f, b h t ducantur. Sumatur autem in g s sectione punctum s; à quo ducatur s f l ipsi b c æquidistans, & s y æquidistans a e. Dico s l y triangulum maius esse, quàm triangulum h l f, triangulo h c b. ducatur enim per h, x h g æquidistans b c: & per g ipsi a e æqui-
A distans ducatur k i g: & s o æquidistans b t. quare perspicuum est diametrum x g coniugatam esse
B se ipsi b t: & s o, quæ æquidistat b t ad h g o ordinatim esse applicatam: itemq; parallelogrammũ esse s l h o. quoniam igitur b c sectionem contingit; ducitur q; b h per tactum; & contingit altera a e: fiat ut d b ad b e, ita linea m n ad duplam ip-
C sius b c: erit m n linea, quæ figuræ ad b t constitutæ rectum latus appellatur. ergo secta m n bi-
D fariam in p, ut d b ad b e, ita est m p ad b c. Deinde fiat ut x g ad t b, ita t b ad lineam r. erit & r latus rectum figuræ, quæ fit ad x g. Itaque quoniam ut d b ad b e, ita m p ad c b: & ut d b ad
lem in 22 decimi b e, ita quadratum d b ad d b e rectangulum: ut
1.sexti. autem m p ad c b, ita rectangulum ex m p & b h ad rectangulum c b h: erit ut quadratum d b ad rectangulum d b e, ita rectangulum ex m p & b h ad rectangulum c b h. Sed rectangulum ex m p,
E & b h æquale est quadrato h g: propterea quòd
20. sexti. quadratum x g est æquale rectangulo ex t b & m n: & rectangulũ ex m p & b h quarta pars est rectanguli ex t b, & m n: quadratum uero g h est item quarta pars quadrati x g. ut igitur quadratum d b ad rectangulum d b e, ita est quadratum g h ad rectangulum c b h: & permutando ut quadratum d b ad quadratum g h, ita rectangulum d b e
F ad c b h rectangulum. sed ut quadratum d b ad quadratum g h, ita triangulum d b e
G ad triangulum g h i; similia enim sunt: & ut rectangulum d b e ad rectangulum c b h, ita d b e triangulum ad triangulum c b h. ut ergo triangulum d b e ad triangulum
9.quinti. g h i, ita triangulum d b e ad ipsum c b h triangulum. quare triangulum g h i triangulo c b h est æquale: & idcirco triangulum g h K à triangulo h i K differt, triangulo g h i; hoc est triangulo c b h. Rursus quoniam h b ad b c compositam proportionem
15.quinti habet ex proportione h b ad m p, & ex proportione m p ad b c: & ut h b ad m p, ita
H K t b ad m n, & linea r ad x g. ut autem m p ad b c, ita d b ad b e: habebit h b ad b c proportionem compositã ex proportione d b ad b e, & proportione r ad x g. Quòd cum æquidistent b c, s l; triangulum h c b simile est triangulo h l f: & ob id ut h b ad b c, ita



b c, ita

b c, ita eſt h l ad l f. quare h l ad l f compoſitam proportionem habet ex proportione lineæ r ad x g; & proportione d b ad b e; hoc eſt g h ad h i. Quoniam igitur hyperbole eſt s g, cuius diameter quidem x g, rectum uero latus r: & ab aliquo ipſius pũcto s applicatur s o: deſcribiturq; ab ea, quæ ex centro, uidelicet ab h g figura h i g: & ab applicata s o, uel h l ipſi æquali figura h l f: ab h o autem, quæ eſt inter centrum & applicatam, uel ab s l ipſi h o æquali deſcribitur s l y figura, ſimilis figuræ h i g, quæ fit ab e a, quæ ex centro: & proportiones habet compoſitas, ut dictum eſt: erit triangulum s l y maius, quàm h l f triangulum, triangulo h c b. L

FED. COMMANDINVS.

Quare perſpicuum eſt diametrum x g coniugatam eſſe ipſi b t.] *Ex uigeſima ſecundi huius: linea enim b c ſectionem contingit: & per centrum h ducitur t h b quidem ad tactum: x h g uero contingenti æquidiſtans.* A

Et s o, quæ æquidiſtat b t ad h g o ordinatim eſſe applicatam.] *Si enim per g ducatur linea ſectionem contingens, æquidiſtabit ipſi t h b ex eadem uigeſima ſecundi, quare & ipſi s o: propterea; ex quadrageſima ſeptima primi huius s o ad h g o ordinatim erit applicata.* B

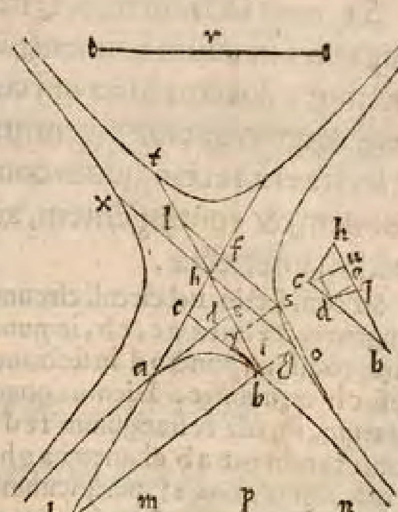
Erit m n linea, quæ figuræ ad b t conſtitutæ rectum latus appellatur.] *Ex quinquageſima primi huius.* C

Erit & r rectum latus figuræ, quæ fit ad x g.] *Eſt enim ſectionis s g diameter, ſiue tranſuerſum latus x g: & b t ſecunda diameter ipſi coniugata, ut dictum eſt. ſecunda autem diameter mediam proportionem habet inter figuræ latera, quod ex eius diffinitione apparet.* D

Propterea quòd quadratum x g æquale eſt rectangulo ex t b & m n.] *Ex diffinitione ſecundæ diametri: nam x g ſecunda diameter eſt ſectionis a b, cuius quidem tranſuerſum latus eſt t b, rectum uero m n.* E

Sed ut quadratum d b ad quadratum g h; ita triangulum d b e ad triangulum g h i, ſimilia enim ſunt.] *Triangula enim d b e, g h i ſimilia ſunt ob æquidiſtantiam linearum d b, h g: itemq; linearum a e, K g. quare triangulum d b e ad ipſum g h i duplam proportionem habet eius, quæ eſt lineæ d b ad g h. & ſimiliter quadratum d b ad quadratum g h proportionẽ habet eiuſdem proportionis duplam. ut igitur quadratum d b ad quadratum g h, ita triangulum d b e ad triangulum g h i.* F 19.ſexti.

Et ut rectangulum d b e ad rectangulum c b h, ita d b c triangulum ad triangulum c b h.] *Deſcribantur ſeorſum triangula d b e, c b h: & ducantur perpendiculares d q, c u, erunt d b q c b u triangula inter ſe ſimilia. quare ut d q ad d b, ita eſt c u ad c b: ut autem d q ad d b, ita rectangulum ex d q & b e ad rectangulum d b e, ex prima ſexti elementorum: & eadem ratione ut c u ad c b ita rectangulum ex c u & b h ad rectãgulum c b h. ergo ut rectangulum ex d q & b e ad rectangulum d b e, ita rectangulum ex c u & b h ad rectangulum c b h: & permutando, rectangulum ex d q & b e ad rectangulum ex c u & b h, ut d b e rectangulum ad rectangulum c b h. rectangulum autem ex d q & b e duplum eſt trianguli d b e: & rectangulum ex c u, & b h duplum trianguli c b h. ergo ut rectangulum d b e ad rectangulum c b h, ita d b e triangulum ad triangulum c b h.* G



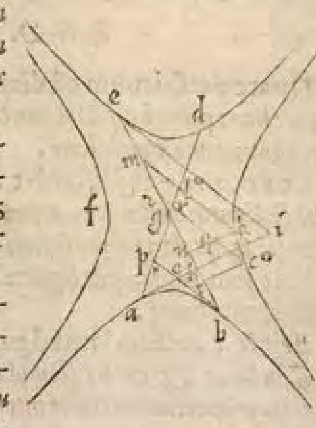
41

Et linea r ad x g.] *Vt enim figuræ, quæ ad t b cõſtituitur, trãſuerſum latus t b ad rectũ m n, ita figuræ, quæ ad x g rectum latus r ad x g tranſuerſum; quod nos in 20. ſecũdi huius oſtendimus.* H

Vt autem m p ad b c, ita d b ad b c.] *Patuit hoc ſupra.* K

Erit triangulum s l y maius, quàm h l f triangulum, triangulo h c b.] *Nam ex quadrageſima prima primi huius ſequitur triangulum s l y maius eſſe, quàm triangulum h l f, triangulo g h i; hoc eſt triangulo c b h, quod ipſi g h i eſt æquale, ut oſtenſum eſt ſuperius.* L

Illud autem, quod hic demonstrat Apollonius, sequitur, etiam si rectæ lineæ sectiones oppositas contingant. Sint enim oppositæ sectiones, quæ coniugatæ appellantur, a b c, d e f, cuius centrum g: & sectiones a b, d e contingant rectæ lineæ a b i, e i in puncto i conuenientes: perq; a e ductis diametris a g d, e g b, sumatur in sectione c punctum k, *à quo ducatur* K *l m quidem ipsi e i æquidistans; &* k *n æquidistans a i. Dico triangulum* k *m n maius esse, quàm triangulum l m g, triangulo g a b. Ducatur per b linea b o p sectionem in b contingens, quæ ipsi e i æquidistabit ex demonstratis ab Eutocio in quadragesimam quartam huius. quare &* k *m æquidistat b p. Itaque quoniam sectionem a b contingunt rectæ lineæ a o, o b: & à puncto* k *in sectione sumpto ducuntur* k *l m,* k *n contingentibus æquidistantes: eodem modo, quo supra, demonstrabitur triangulum* K *m n maius, quàm triangulum l m g, triangulo g a b. atque hoc est quod demonstrandum proponebatur. Ex iam dictis etiam illud Theorema ostendi potest.*



42 Iisdem positis, si in quauis sectione aliqua puncta sumantur: & ab ipsis ducantur lineæ contingentibus æquidistantes, quæ & contingentibus, & diametris occurrãt; quadrilatera à lineis ductis constituta ad diametros inter se æqualia erunt.

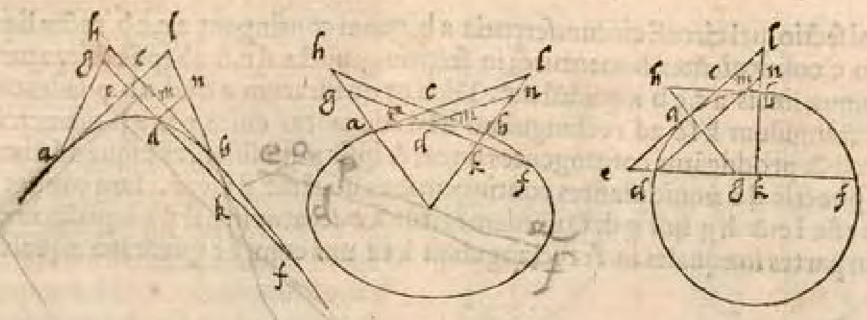
Maneant enim eadem, quæ supra: & in sectione c aliud punctum sumatur, quod sit c, atque ab eo ducantur c q r s, c t contingentibus æquidistantes. Dico quadrilaterum k *l r q quadrilatero c q n t æquale esse. ex iis enim, quæ demonstrata sunt, triangulum c s t maius est, quàm triangulum r s g, triangulo g a b. quare quadrilaterum c r g t triangulo g a b est æquale. & simili ratione cum triangulum* k *m n maius sit, quàm triangulum l m g, triangulo g a b, erit & quadrilaterum* k *l g a æquale eidem g a b triangulo. quadrilatera igitur c r g t,* k *l g n inter se æqualia erunt: & dempto communi quadrilatero r g n q, relinquetur quadrilaterum* k *l r q quadrilatero c q n t æquale; quod quidem demonstrare oportebat.*

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVI.

Si coni sectionem, uel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in unum conueniant: & ab aliquo puncto eorum, quæ sunt in sectione, ducatur linea uni contingentium æquidistans, quæ & sectionem & alteram contingentium secet: ut quadrata contingentium inter se se, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ interiiciuntur inter sectionem, & contingentem, ad quadratum lineæ inter æquidistantem & tactum interiectæ.

Sit coni sectio, uel circuli circumferentia a b, quam contingant rectæ lineæ a c, c b, in puncto c conuenientes: &
43 sumpto aliquo puncto d in sectione, ab eo ducatur d f, quæ ipsi c b æquidistet. Dico ut quadratum b c ad c a quadratum, ita esse rectangulum f e d ad quadratum e a. ducantur enim per a b diametri a g h, k b l: & per d ducatur
46. & 47. primi huius. d m n æquidistans a l. perspicuum est, lineam d k ipsi k f æqualem esse: triangulumq; a e g æquale quadrilatero d l:
2. huius & triangulum b l c triangulo a c h. Itaque quoniam f K
1. huius æqualis est k d, & ipsi adiicitur d e, rectangulum f e d unà
6. secũdi element. cum d k quadrato æquale erit quadrato k e. est autem
3. lemma Pappi. triangulum e l K simile triangulo d n k. quare & e k quadratum ad quadratum k d, ita triangulum e l k ad triangulum d n k: & permutando ut totum quadratum e k ad
19. quĩti. totum triangulum e l k, ita ablatum quadratum d k ad ablatum triangulum d n k. ergo & reliquum f e d rectangulum ad reliquum quadrilaterum d l, ut quadratum e k

ad trian-



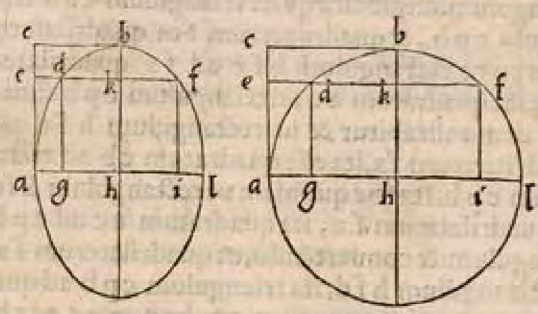
ad triangulum e l h. ſed ut quadratum e k ad e l κ triangulum, ita eſt quadratum c b ad triangulum l c b. ut igitur f e d rectangulum ad quadrilaterum d l, ita quadratum c b ad l c b triangulum. eſt autem quadrilaterum d l triangulo a e g æquale; & triangulum l c b æquale triangulo a h c. quare ut rectangulum f e d ad triangulum a e g, ita quadratum c b ad a h c triangulum: & permutando ut rectangulum f e d ad quadratum c b, ita a e g triangulum ad triangulum a h c. ſed ut triangulum a g e ad triangulum a h c, ita quadratum e a ad a c quadratum. ergo ut rectangulum f e d ad quadratum c b, ita quadratum e a ad quadratum a c. & permutãdo ut quadratum b c ad quadratum c a, ita f e d rectangulum ad quadratum e a. 3 lemma Pappi.

E V T O C I V S.

In aliquibus codicibus hoc theorema, ut ſeptimum decimum apponitur. ſed re uera caſus eſt ſexti decimi theorematis; eo enim tantum differt, quòd lineæ contingentes a c, c b diametris æquidiſtant, alia uero eadem eſſe conſtat. In commentarijs igitur illud ponere oportebat, ut ſcripſimus in quadrageſimum primum theorema primi libri.

Si in ellipſi & circulo diametri, quæ tranſeunt per tactus, contingentibus æquidiſtantes ſint, eadem prorſus euenient, quæ in propoſitione dicuntur.

Quoniam enim ut quadratum b h ad rectangulum l h a, ita d g quadratum ad rectangulum l g a: atque eſt rectangulum quidẽ l h a quadrato a h æquale: rectangulũ autẽ l g a æquale rectangulo i a g; quòd linea a h æqualis ſit h l, & d k ipſi k f. proptereaq́; g h æqualis h i, & a g ipſi i l: erit ut quadratum a h ad h b quadratum, hoc eſt quadratum b c ad quadratum c a; ita rectangulum i a g ad quadratum d g; hoc eſt rectangulum f e d ad e a quadratum. 21. primi huius.



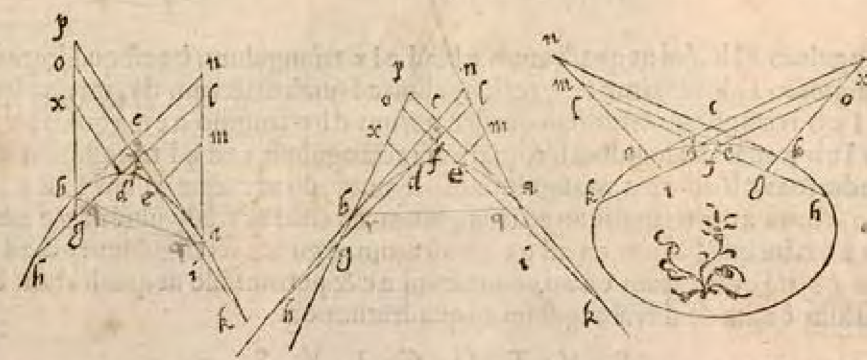
THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

Si coni ſectionem, uel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in unum conueniant: ſumantur autem in ſectione duo quæuis puncta: & ab iis ducantur lineæ contingentibus æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis & lineæ occurrant: ut quadrata contingentium inter ſe ſe, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ interiiciuntur inter ſectionem & linearum occurſum ad rectangulum, quod lineis ſimiliter ſumptis continetur.

Sit coni sectio, uel circuli circumferentia a b, quam contingant a c, c b rectæ lineæ, in puncto c conuenientes: sumanturq; in sectione puncta d, e, & ab ipsis ducantur e f i k, d f g h, quæ lineis a c, c b æquidistent. Dico ut quadratum a c ad c b quadratum, ita esse rectangulum k f e ad rectangulum h f d. ducantur enim per a b diametri a l m n, b o x p: & producãtur contingentes lineæ; & ipsis æquidistantes usque ad diametros: & à punctis d e æquidistantes contingentibus ducãtur d x, e m. Iam constat k i

A æqualem esse i e: & h g ipsi g d. Quoniam igitur k e secatur in partes æquales in pun

5.secũdi cto i, & in partes inæquales in f: rectangulum k f e unà cum f i quadrato æquale est

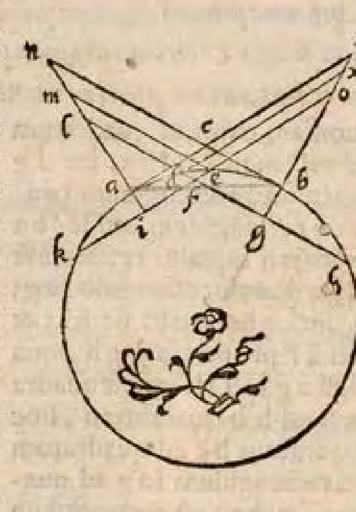


B quadrato e i: & cum triangula similia sint ob lineas æquidistantes, erit ut totum quadratum e i ad totum i m e triangulum, ita ablatum quadratum i f ad ablatum triangulum f i l. quare & reliquum k f e rectangulum ad reliquum quadrilaterum f m, est ut totum quadratum e i ad totum i m e triangulum. sed ut quadratum e i ad triangulum i m e, ita quadratum a c ad triangulum c a n. ut igitur k f e rectangulum ad quadrilaterum f m, ita quadratum a c ad c a n

C triangulum. atque est æquale triangulum c a n tri-

D angulo c p b, & quadrilaterum f m quadrilatero f x. ergo ut rectangulum k f e ad f x quadrilaterum, ita quadratum a c ad triangulum c p b. similiter demonstrabitur & ut rectangulum h f d ad quadrilaterum f x, ita esse quadratum c b ad triangulum c p b. Itaque quoniam ut rectangulum k f e ad quadrilaterum f x, ita quadratum a c ad c p b

E triangulum: & conuertendo, ut quadrilaterum f x ad rectangulum h f d, ita triangulum c p b ad quadratum c b: erit ex æquali ut quadratum a c ad c b quadratum, ita rectangulum K f e ad rectangulum h f d.



EVTOCIVS.

Hoc etiam theorema similiter ac præcedens positum est, quod nos ut casum auferentes, hoc loco conscripsimus.

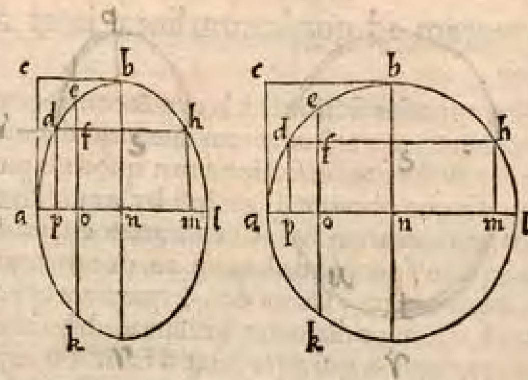
Si in ellipsi, & circuli circumferentia diametri, quæ per tactus ducuntur, æquidistantes sint contingentibus a c, c b; erit itidem ut quadratum a c ad quadratum c b, ita rectangulum K f e ad rectangulum d f h.

Ducantur enim per d h ordinatim applicatæ d p, h m. & quoniam ut quadratum a c ad c b quadratum, ita quadratum b n ad quadratum n a, hoc est ad rectangulum

21. primi huius. a n l. ut autem quadratum b n ad rectangulum a n l, ita quadratum d p, hoc est quadratum f o ad rectangulum a p l; & quadratum e o ad rectangulum a o l: erit & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum. sed si à quadrato e o auferatur d p quadratũ,

hoc

hoc eſt quadratum f o; relinquitur rectangulum K f e: eſt enim K o ipſi o e æqualis. rurſus ſi à rectangulo a o l auferatur rectangulum a p l, relinquitur m o p rectangulum, hoc eſt rectangulum h f d: namque a p eſt æqualis m l, & p n ipſi n m. ut igitur quadratum a c ad quadratum c b, ita reliquum rectangulum K f e ad reliquum h f d. Quòd ſi punctum f extra ſectionem cadat, additiones & ablationes contra facere oportebit. 5. ſecũdi. F



FED. COMMANDINVS.

Quoniam igitur K e ſecatur in partes æquales in puncto i, & in partes inæquales in f, rectangulum K f e una cum f i quadrato æquale eſt quadrato e i.] *Ita quidem argumentabimur cum punctum f intra ſectionem cadit: ſed cum cadit extra, in hunc modum dicemus. Quoniam k e in puncto i bifariam ſecatur, & ipſi adiicitur recta linea e f; erit rectangulum k f e unà cum e i quadrato æquale quadrato e f. ſunt autem triangula f l i, e m i inter ſe ſimilia. quare cum ſit ut totum quadratum i f ad totum triangulum f l i, ita ablatum quadratum e i ad ablatum e m i triangulum; erit & reliquum rectangulum k f e ad reliquum quadrilaterum f m, ut i f quadratum ad triangulum f l i. cetera, quæ deinceps ſequuntur, eodem modo concludemus.* A

Et cum triangula ſimilia ſint ob lineas æquidiſtantes, erit ut totum quadratum e i ad totum i m e triangulum, ita ablatum quadratum i f ad ablatum triangulum f i l.] *Eſt enim per tertium lemma Pappi ut quadratum e i ad quadratum i f, ita triangulum i m e ad f i l triangulum. quare & permutando ut quadratum e i ad triangulum i m e, ita quadratum i f ad triangulum f i l.* B

Atque eſt æquale triangulum c a n triangulo c p b.] *Ex prima huius.* C

Et quadrilaterum f m quadrilatero f x.] *Ex tertia huius.* D

Et conuertendo, ut quadrilaterum f x ad rectangulum h f d, ita triangulum c p b ad quadratum c b.] *Superius enim demonſtratum eſt, ut rectangulum h f d ad quadrilaterum f x, ita quadratum c b ad triangulum c p b.* E

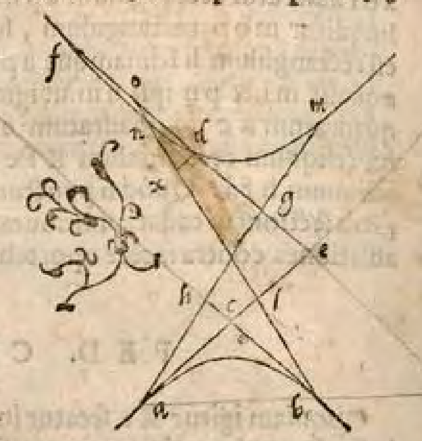
IN ALIAM DEMONSTRATIONEM, QVAE AB EVTOCIO AFFERTVR.

Rurſus ſi à rectangulo a o l auferatur rectangulum a p l, relinquitur m o p rectangulum.] *Nam rectangulum a o l æquale eſt rectangulo m o p unà cum rectangulo a p l; quod quidem primum demonſtratum eſt à Pappo in tertio, & quarto eorum lemmatum, quæ in ſecundum librum Apollonij conſcripſit: deinde ab Eutocio in commentarijs in uigeſimam tertiam ſecundi huius.* F

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

Si oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes in unum conueniant: ſumatur autem in quauis ſectione aliquod punctum: & ab eo ducatur linea uni contingentium æquidiſtans, quæ & ſectionem & alteram contingentium ſecet: ut quadrata contingentium inter ſe ſe, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ interiiciuntur inter ſectionem & con tingentem ad quadratum lineæ inter æquidistantem & tactum interiectæ.

Sint oppositæ sectiones a b, m n: & contingentes lineæ a c l e, b c h, quæ in puncto c conueniant: per tactus autem ducantur diametri a m, b n: & sumatur in sectione m n quoduis punctum d, à quo ducatur d f g e ipsi b c æquidistans. Dico ut quadratum b c ad quadratum c a, ita esse rectãgulum f e d ad quadratum a e. ducatur enim per d ipsi a c æquidistans d x. & quoniam hyperbole est a b, cuius diameter b n: lineaq; b h sectio-



A nem contingit: & ipsi æquidistat d f: erit f o æqua

6. secũdi lis o d: adiungitur autem d e. ergo rectangulum f e d una cum d o quadrato æquale est quadrato o e. & cum e l æquidistet d x, triangulum e o l simile est triangulo d o x. est igitur ut totum quadratũ e o ad triangulum e o l, ita ablatum quadratũ d o

19. quinti ad ablatum d o x triangulum. quare & reliquum

B rectangulum f e d ad quadrilaterum d l, ut e o quadratum ad triangulum e o l. sed ut quadratum e o ad e o l triangulum, ita quadratum b c ad triangulum b c l. ut igitur

C rectangulum f e d ad quadrilaterum d l, ita quadratum b c ad b c l triangulum. æ-

D quale autem est quadrilaterum d l triangulo a e g. & triangulum b c l triãgulo a c h. ergo ut f e d rectangulum ad triangulum a e g, ita quadratum b c ad a c h triangulum. sed ut triangulum a e g ad quadratum e a, ita triangulum a c h ad quadratum a c. ex æquali igitur ut quadratum b c ad quadratum c a, ita rectangulum f e d ad e a quadratum.

EVTOCIVS.

In aliquibus exemplaribus alia demonstratio huius theorematis inuenitur, cum utramque sectionem contingentes rectæ lineæ conueniant.

Sint enim oppositæ sectiones a b, quas contingant lineæ a c, c b in puncto c conuenientes: sumaturq; aliquod punctum d in b sectione: & ab eo ducatur d e f, ipsi a c æquidistans. Dico ut quadratum a c ad c b quadratum, ita esse rectangulum e f d ad quadratum f b. ducatur enim per a diameter a h g: & per b g ducantur b l, g k æquidistantes e f. Quoniam igitur b h in puncto b hyperbolen contingit: & ordinatim applicata

E F est b l: erit ut a l ad l g, ita a h ad h g. sed ut a l ad l g, ita c b

G ad b k. & ut a h ad h g, ita a c ad k g. quare ut c b ad b k, ita a c ad k g: & permutando ut a c ad c b, ita g K ad K b. sed ut quadratum a c ad quadratum c b, ita quadratum g K ad

H K b quadratum: & ut quadratum g K ad quadratum K b, ita demonstratum est rectangulum e f d ad quadratum f b. ergo ut quadratum a c ad c b quadratum, ita e f d rectangulum ad quadratum f b.

FED. COMMANDINVS.

A Erit f o æqualis o d.] *Ex 48. primi huius.*

B Sed ut quadratum e o ad e o l triangulum, ita quadratum b c ad triangulum b c l] *Est enim triangulum b c l simile triangulo e o l, propterea quòd linea e o æquidistat contingenti*

19. sexti *b c. ergo triangulum e o l ad triangulum b c l duplam proportionem habet eius, quæ est lineæ e o*

20. sexti. *ad b c. quadratum autem e o ad quadratum b c proportionem itidem habet duplam eiusdem proportionis*

portionis. ut igitur quadratum e o ad b c quadratum, ita triangulum e o l ad triangulum b c l: & permutando ut quadratum e o ad e o l triangulum, ita quadratum b c ad triangulum b c l.

Aequale autem est quadrilaterum d l triangulo a e g.] *Ex sexta huius.* C

Et triangulum b c l triangulo a c h.] *Ex prima huius.* D

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM QVAM PONIT EVTOCIVS.

Erit ut a l ad l g, ita a h ad h g.] *Ex 36. primi huius.* E

Sed ut a l ad l g, ita c b ad b k.] *Nam cum triangula a h c, l h b similia sint, erit ut a h ad h c, ita l h ad h b: & permutando ut a h ad h l, ita c h ad h b: componendoq; ut a l ad l h, ita c b ad b h. ut autem h l ad l g, ita h b ad b k. ex æquali igitur ut a l ad l g, ita c b ad b K.* F

Et ut a h ad h g, ita a c ad K g] *Ob similitudinem uidelicet triangulorum a h c, g h k.* G

Et ut quadratum g K ad quadratum K b, ita demonstratum est rectāgulum e f d ad quadratum f b.] *Demonstratur hoc in 16. huius.* H

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes in unum conueniant: & ducantur contingentibus æquidistantes, quæ & sibi ipsis, & sectioni occurrant: ut quadrata contingentium inter se se, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ interiiciuntur inter sectionem, & linearū occursum, ad rectangulum, quod lineis similiter sumptis continetur.

Sint oppositæ sectiones, quarum diametri a c, b d, centrum e; & contingentes a f, f d, quæ in f conueniant: sumantur autem quæuis g, m, puncta; & ab ipsis ducantur g h i k l, m n x o l lineis a f, f d æquidistantes. Dico ut a f quadratum ad quadratum f d, ita esse rectangulum g l i ad rectangulum m l x. ducantur enim per x i lineæ x r, i p æquidistantes ipsis a f, f d. Itaque quoniam ut quadratum a f ad a f s triangulum, ita quadratum h l ad triangulum h l o: & quadratum h i ad triangulum h i p: erit & reliquum rectangulum g l i ad reliquum i p o l quadrilaterum, ut quadratum a f ad triangulum a f s. atque est triangulum a f s triangulo d f t æquale. & o p i l quadrilaterum quadrilatero k r x l. ut igitur quadratum a f ad triangulum d t f, ita rectangulum g l i ad quadrilaterū r x l k. est autem ut triangulum d t f ad f d quadratum, ita quadrilaterum r x l k ad rectangulū m l x. ergo ex æquali ut quadratum a f ad f d quadratū, ita rectangulum g l i ad rectangulum m l x.

6. secūdi. 19. quinti A B

EVTOCIVS.

In aliquibus codicibus demonstratio huius theorematis inuenitur huiusmodi.

Ducatur m l quidem ipsi f a æquidistans, quæ sectionem d c secet; g l uero æqui-

distans fd, & ipsam ab secans. demonstrandum est ut quadratum d f ad fa quadratum, ita esse rectangulum g l i ad rectangulum m l x. ducatur enim per tactus a d diametri a c, d b: & per c b ipsæ b p, p c
D contingentibus æquidistantes. ergo b p, p c sectio-
E nes in punctis b c contingunt. & quoniam e centrũ est sectionum, erit be ipsi e d æqualis, & a e æqualis
F e c. quare cum æquidistent a t f, c s p, & t e æqualis
G erit e s: & propterea b s ipsi d t: triangulumq; b p s triãgulo d t f æquale. linea igitur b p æqualis est d f:
H & similiter c p æqualis a f demonstrabitur. sed ut quadratum b p ad p c quadratum, ita est rectangulum g l i ad rectangulum m l x. ut igitur quadratum d f ad quadratum f a, ita g l i rectangulum ad rectangulum m l x.

ALITER IN IDEM.

Rursus ducatur utraque linearum g h k, i h l æquidistans contingenti, secansq; d c sectionem. ostendendum est ut quadratum d f ad quadratum fa, ita esse rectangulum i h l ad rectangulum g h κ. ducatur enim per a tactũ diameter a c & per c ipsa c m,
K quæ æquidistet a f. ergo c m continget sectionem
L c d in puncto c: atque erit ut quadratũ d m ad quadratum m c, ita rectangulum i h l ad rectangulum
M g h k. ut autem d m quadratum ad quadratum m c, ita quadratum d f ad quadratum f a. quare ut quadratum d f ad fa quadratum, ita rectangulum i h l ad rectangulum g h k.

FED. COMMANDINVS.

A Atque est triangulum a f s triangulo d f t æquale.] *Ex quarta huius.*

B Et o p i l quadrilaterum quadrilatero k r x.] *Ex septima huius.*

C Est autem ut triangulum d t f ad f d quadratum, ita quadrilaterum r x l κ ad rectãgulum m l x.] *Eodem enim modo, quo supra demonstratum est, rectangulum g l ι ad quadrilaterum ι p l o, ut quadratum a f ad triangulum a f s: demonstrabitur etiam m l x rectangulum ad quadrilaterum r x l k esse, ut quadratum d f ad triangulum d t f. quare & conuertendo, ut triangulum d t f ad quadratum f d, ita erit quadrilaterum r x l κ ad m l x rectangulum.*

IN ALIAS DEMONSTRATIONES QVAE AB EVTOCIO AFFERVNTVR.

D Ergo b p, p c sectiones in punctis b c contingunt.] *Hoc nos demonstrauimus in commentariis in quadragesimam quartam primi huius.*

E Et quoniam e centrum est sectionum, erit b e ipsi e d æqualis & a e æqualis e c.] *Ex trigesima primi huius.*

F Quare cum æquidistent a t f, c s p, & t e æqualis erit e s.] *Quoniã enim lineæ a t f, c s p inter se æquidistant, erunt triangula a t e, c s e similia. & propterea ut a e ad e t, ita c e ad e s: & permutando ut a e ad e c, ita t e ad e s. lineæ igitur t e, e s inter se æquales sunt. & addita s c ipsi e b, & t e ipsi e d, erit & b s æqualis d t.*

G Triangulumq; b p s triangulo d e f æquale.] *Rursus enim ob lineas æquidistantes b p, d f, itémq; a f, c p: triangulum b p s simile est triangulo d t f; & ut s b ad b p, ita t d ad d f: & permutando ut b s ad d t, ita b p ad d f. est autem b s æqualis d t, ut demonstratum est. ergo & b p.*

ipsi

ipsi d f. ex quibus constat triangulum b p s triangulo d t f etiam æquale esse. G

Sed ut quadratum b p ad p c quadratum, ita est rectangulum g l i ad rectangulum m l x.] *Ex proxime demonstratis.* H

Ergo c m continget sectionem c d in puncto c.] *Ex iis, quæ demonstrauimus in quadragesimam quartam primi huius.* K

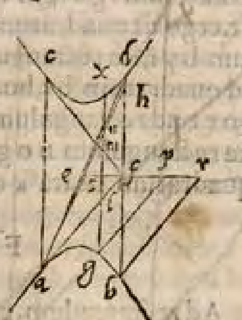
Atque erit ut quadratum d m ad quadratum m c, ita rectangulum i h l ad rectangulum g h K.] *Ex 17. huius.* L

Vt autem d m quadratum ad quadratum m c, ita quadratum d f ad quadratũ f a.] M
Iisdem enim manentibus ducatur d c: & iuncta f e producatur, ut cum linea c m in puncto n conueniat. erit ex trigesima septima & trigesima nona secundi huius, f e n recta diameter oppositarum sectionum; quæ ipsi d c æquidistabit: & idcirco triangula d m c, f m n inter se similia erunt. Itaque ut f m ad m n, ita d m ad m c: & permutando ut f m ad m d, ita n m ad m c. ergo componendo, conuertendoq; ut m d ad d f, ita m c ad c n: & rursus permutando, ut d m ad m c, ita d f ad c n. est autem f a ipsi c n æqualis, quod iam demonstratum fuit. quare ut d m ad m c, ita d f ad f a. ut igitur quadratum d m ad m c quadratum, ita quadratum d f ad quadratum f a.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XX.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occurrant: & per occursum ducatur linea tactus coniungenti æquidistans, quæ secet utramque sectionem: ducatur autem alia linea æquidistans eidem; sectionesq;, & contingentes secans: erit ut rectangulum contentum lineis, quæ inter occursum contingentium & sectiones interiiciuntur ad quadratum lineæ contingentis, ita rectangulum, quod continetur lineis inter sectiones & contingentem interiectis, ad quadratum lineæ ad tactum abscissæ.

Sint oppositæ sectiones a b, c d, quarum centrum e, & a f, f c lineæ contingentes. iungantur autem a c, e f, a e, & protrahantur: perq; f ducatur b f h d ipsi a c æquidistans & sumpto in sectione quouis puncto g, ducatur g l s m n x æquidistans a c. Dico ut rectangulum b f d ad quadratum f a, ita esse rectangulum g l x ad quadratum a l. ducantur enim à punctis g b lineæ g p, b r æquidistantes ipsi a f. & quoniam ut quadratum b f ad b f r triangulum, ita quadratum g s ad triangulum g s p: & quadratum l s ad triangulum l s f: erit & reliquum rectangulum g l x ad quadrilaterum g l f p, ut quadratum b f ad triangulum b f r. A B
quadratum autem b f æquale est rectãgulo b f d: triangulumq; b r f triangulo a f h & quadrilaterum g l f p triangulo a l n. ergo ut rectangulum b f d ad triangulum a f h, ita g l x rectangulum ad triangulum a l n. sed ut triangulum a f h ad quadratum a f, ita triangulum a l n ad quadratum a l. ex æquali igitur, ut rectangulum b f d ad quadratum f a, ita rectangulum g l x ad quadratum a l. C D E



In questa figura la retta a d è superflua.

FED. COMMANDINVS.

Erit & reliquum rectangulum g l x ad quadrilaterum g l f p, ut quadratum b f ad triangulum b f r.] *Ex decima nona quinti. nam rectangulum g l x unà cum quadrato l s æquale est quadrato g s. quare si à quadrato g s auferatur l s quadratum, relinquitur rectangulum g l x.* A 5. secũdi

Vt quadratum b f ad triangulum b f r.] *Desiderabantur hæc in græco codice, quæ nos suppleuimus.* B

Quadratum autem b f æquale est rectangulo b f d.] *Lineæ enim b f, f d æquales sunt, cum recta diameter sit e f, ut ex 38. & 39. secundi huius manifeste apparet.* C

D Triangulumq; b r f triangulo a f h.] *Nam ex quadragesima quinta primi huius, triangulum b r f maius est, quam triangulum e h f, triangulo f a e. quare sequitur triangulum b r f æquale esse duobus triangulis e h f, e a f, hoc est æquale triangulo a f h.*

E Et quadrilaterum g l f p triangulo a l n.] *Ex quinta huius.*

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXI.

Iisdem positis si in sectione duo puncta sumantur: & per ipsa ducantur rectæ lineæ; una quidem contingenti æquidistans, altera uero æquidistans lineæ tactus coniungenti; quæ & sibi ipsis, & sectionibus occurrant: erit ut rectangulum contentum lineis, quæ interiiciuntur inter occursum contingentium, & sectiones ad quadratum contingentis, ita rectangulum contentum lineis inter sectiones, & linearum occursum

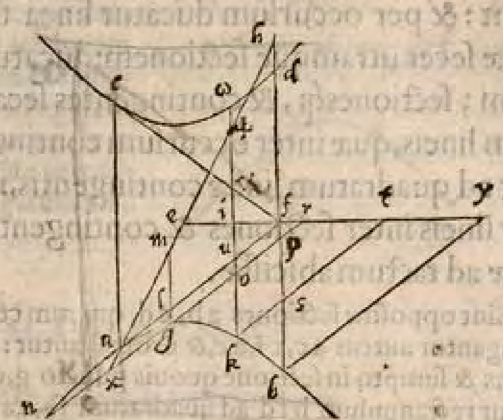
A interiectis, ad rectangulum, quod lineis similiter sumptis continetur.

Sint eadem, quæ supra: & sumptis in sectione punctis g, k, per ea ducantur n x g o, p r, k s t ipsi a f æquidistantes; & g l m, k o u i χ ⟂ ω æquidistantes a c. Dico ut rectangulum b f d ad quadratum f a, ita esse k o ω rectangulum ad rectangulum n o g. Quoniam enim est ut quadratum a f ad triangulum a f h, ita quadratum a l ad a l m triangulum, & quadratum x o ad triangulum x o ⟂, & quadratum x g ad triangulum x g m: erit ut totũ quadratum x o ad totum triangulũ x o ⟂, ita quadratum x g ablatum ad ablatũ triangulum x g m. quare & reliquum rectangulum n o g ad reliquum quadrilaterum g o ⟂ m erit, ut quadratũ

B a f ad a f h triangulum. sed triangulũ

C a f h æquale est triangulo b y f: & quadrilaterum g o ⟂ m quadrilatero k o r t. ergo ut quadratum a f ad triangu-

D lum b y f, ita rectangulum n o g ad quadrilaterum k o r t. ut autem triangulum b y f ad quadratum b f, hoc est ad rectangulum b f d, ita demonstratum est quadrilaterum k o r t ad rectangulum k o ω. ex æquali igitur ut a f quadratum ad rectangulum b f d, ita rectangulum n o g ad rectangulum k o ω: & conuertendo ut rectãgulum b f d ad quadratum f a, ita k o ω rectangulum ad rectangulum n o g.



FED. COMMANDINVS.

A Ad rectangulum, quod lineis similiter sumptis continetur.] *Hæc nos addidimus, quæ in græco codice desiderari uidebantur, uel alia in eandem sententiam.*

B Sed triangulum a f h æquale est triangulo b y f.] *Sequitur hoc ex quadragesima quinta primi huius, ut nos proxime ostendimus.*

C Et quadrilaterum g o ⟂ m quadrilatero k o r t.] *Ex 12. huius.*

D Vt autem triangulum b y f ad quadratum b f, hoc est ad rectangulum b f d, ita demonstratum est quadrilaterum k o r t ad rectangulum k o ω.] *Demonstrabimus enim, ut in antecedente, rectangulum k o ω ad quadrilaterum k o r t ita esse, ut quadratum b f, hoc est rectangulum b f d ad triangulum b f y. quare & conuertendo.*

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXII.

Si oppositas sectiones contingant duæ rectæ lineæ, inter se æquidistantes

ſtantes: ducantur autem aliæ lineæ, quæ & ſibi ipſis & ſectionibus occurrant; una quidem contingenti æquidiſtans, altera uero æquidiſtans ei, quæ tactus coniungit: erit ut tranſuerſum latus ad rectum figuræ, quæ ad lineam tactus coniungentem conſtituitur, ita rectangulum contentum lineis inter ſectionem & linearum occurſum interiectis ad rectangulum, quod lineis ſimiliter ſumptis continetur.

Sint oppoſitæ ſectiones a b, quas contingant rectæ lineæ a c, b d inter ſe æquidiſtantes: & iuncta a b, ducatur e x g ipſi a b æquidiſtans, & k e l m æquidiſtans a c. Dico ut a b ad rectum figuræ latus, ita eſſe g e x rectangulum ad rectangulum k e m. ducantur enim per x, g lineæ g f, x n ipſi a c æquidiſtantes. & quoniam a c, b d æquidiſtantes inter ſe, ſectiones contingunt, erit & a b diameter, & lineæ k l, x n, g f ad ipſam ordinatim applicabuntur. A ut igitur a b ad rectum latus, B ita b l a rectangulum ad quadratum l k, & rectãgulum b n a ad quadratum n x, hoc eſt ad quadratum l e. quare ut totũ rectangulum b l a ad totum quadratum k l, ita erit rectangulum b n a ablatum, hoc eſt f a n; quòd n a, b f æquales ſint, C ad ablatum quadratũ l e. reliquum igitur f l n rectangulum ad reliquum rectangulum D k e m erit ut a b ad rectum latus. eſt autem rectangulum f l n æquale ipſi g e x. ergo ut a b tranſuerſum figuræ latus ad rectum, ita g e x rectangulum ad rectangulum k e m.

FED. COMMANDINVS.

Erit & a b diameter.] *Nam ſi a b non eſt diameter, per centrum non tranſibit. quare a c, b d conuenient inter ſe ſe ad eaſdem partes centri ex trigeſima prima ſecundi huius, quod quidé fieri non poteſt, ponebantur enim æquidiſtantes.* A

Vt igitur a b ad rectum latus, ita b l a rectangulum ad quadratum l k.] *Ex uigeſima prima primi huius.* B

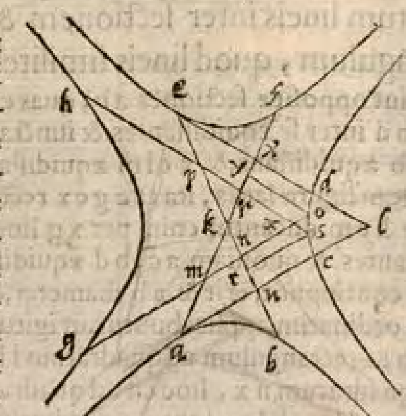
Quod n a, b f æquales ſint.] *Eſt enim ut quadratum n x ad rectangulum b n a, ita ſectionis a rectum latus ad tranſuerſum: & ut quadratum f g ad rectangulum a f b, ita ſectionis b rectum latus ad tranſuerſum. harum autem ſectionum tranſuerſum latus idem eſt, uidelicet a b: & ſectionis a latus rectum eſt æquale recto lateri ſectionis b; quod apparet ex decima quarta primi huius. ut igitur quadratum n x ad rectangulum b n a, ita quadratum f g ad a f b rectangulum: & permutando ut quadratum n x ad quadratum f g, ita rectangulum b n a ad rectangulum a f b. ſed quadratum n x eſt æquale quadrato f g; quòd linea n x æqualis f g, eſt enim n x g l parallelogrammum. ergo rectangulum b n a rectangulo a f b eſt æquale: & propterea ſequitur lineam n a ipſi f b æqualem eſſe, ex lemmate, quod conſcripſimus in ſextam decimam ſecundi huius.* C 21. primi huius.

Reliquum igitur f l n rectangulum ad reliquum rectangulum k e m, erit ut a b ad rectum latus.] *Rectangulum enim b l a ſuperat rectangulum b n a rectangulo f l n: quod Pappus in quarto lemmate demonſtrauit.* D

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

Si in oppoſitis ſectionibus, quæ coniugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ oppoſitas ſectiones contingentes conueniant in quauis ſectione: ducantur autem aliquæ lineæ contingentibus æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis, & aliis ſectionibus oppoſitis occurrant: ut quadrata contingentium inter ſe ſe, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ inter ſectiones, & occurſum interiiciuntur, ad rectangulum, quod lineis ſimiliter ſumptis continetur.

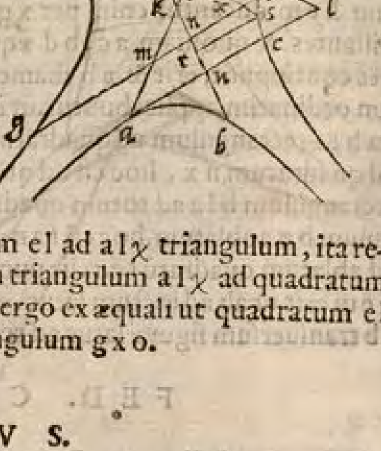
Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur a b, c d, e f, g h: ſitq; earum centrum K: & ſectiones a b, e f contingant rectæ lineæ a u c l, e χ d l, conuenientes in l: & iunctæ a K, e k ad b f producantur. à puncto autem g ducatur g m n x o ipſi a l æquidiſtans: & à puncto h ducantur h p r x s æquidiſtans e l. Dico ut quadratum e l ad quadratum l a, ita eſſe h x s rectangulum ad rectangulum g x o. ducatur enim per s linea s t æquidiſtãs a l. & per o ducatur o y ipſi e l æquidiſtans. Quoniam igitur oppoſitarum ſectionum, quæ coniugatæ appellantur, a b, c d, e f, g h diameter eſt b e: & e l ſectionem contingit: ipſiq; æquidiſtans ducta eſt h s: erit h p æqualis p s: & eadem ratione g m æqualis m o. & quoniam ut quadratum e l ad e u l triangulum, ita eſt quadratum p s ad triangulum p t s: & quadratum p x ad triangulum p n x: erit & reliquũ rectangulum h x s ad quadrilaterum t n x s, ut
5. ſecũdi & 19. qui ti quadratum e l ad triãgulum e u l. ſed e u l trian
A gulum æquale eſt triangulo a l χ: & quadrilate-
B rum t n x s quadrilatero x r y o. ut igitur quadratum e l ad a l χ triangulum, ita re-
C ctangulum h x s ad quadrilaterum x r y o. ut autem triangulum a l χ ad quadratum a l, ita quadrilaterum x r y o ad rectangulum g x o. ergo ex æquali ut quadratum e l ad quadratum l a, ita eſt h x s rectangulum ad rectangulum g x o.



EVTOCIVS.

Hoc theorema plures habet caſus, quemadmodum & alia, uerum quoniam in aliquibus exemplaribus loco theorematum caſus deſcripti inueniuntur, & aliæ quadam demonſtrationes, nobis uiſum eſt ipſas auferre. Vt autem ij, qui in hæc inciderunt, ex differenti appoſitione ſententiam meam perpendere poſſint, eas in commentarijs expoſuimus.

Itaque contingentibus æquidiſtantes g κ o, h k s per centrum, quod ſit k trãſeat. Dico iam ut quadratum e l ad quadratum l a, ita etiam eſſe rectangulum h K s ad rectangulum g K o. ducantur enim per g h lineæ g m, h n, quæ contingentibus æquidi-
D ſtent. erit triangulum g K m triangulo a K t æquale: triangulum autem h k n æquale triangulo e k p:
E & triangulo e K p æquale a κ t triangulum. ergo triangulum g k m ipſi h k n æquale erit. ſed ut quadratum e l ad triangulum l e t, ita quadratum h K ad triangulum h k n. atque eſt triangulum l e t æquale triangulo l a p: triangulum uero h k n triangulo g K m. ut igitur quadratum e l ad triangulum l a p, ita quadratum h *k* ad triangulum g k m: & ut triangulum l a p ad quadratum l a, ita triangulum g κ m ad quadratum g k. ergo ex æquali ut quadratum e l ad quadratum l a, ita quadratum h k, hoc eſt rectangulum h k s ad quadratum g k, hoc eſt ad rectangulum g k o.



Iiſdem manẽtibus ſi linea h k p, quæ ipſi e l æquidiſtans ducitur, tranſeat per κ centrum; g o uero per centrum non tranſeat: dico ſimiliter ut quadratum e l ad quadratum l a, ita eſſe rectangulum h x p ad rectangulum g x o. ducantur enim per o p
F contingentibus æquidiſtantes, o r, p s. & quoniam triangulum m o r maius eſt, quàm triangulum m n k, triangulo a k t: triangulum autem a k t æquale eſt triangulo κ s p:

erit

erit m o r triangulum æquale triangulis m n k, k s p. quare sublato communi, uidelicet triangulo m x κ, reliquum quadrilaterum x s quadrilatero x r est æquale. Quòd cum sit ut quadratum e l ad triangulum e l t, ita quadratum k p ad triangulum κ p s, & ita quadratum κ x ad triangulum k x n: erit ut quadratum e l ad e l t triangulum, ita reliquum, rectangulum scilicet h x p ad quadrilaterum x s. est autem triangulum e l t æquale triangulo a l u, & quadrilaterum x r quadrilatero x s. ergo ut quadratum e l ad triangulum a l u, ita rectangulum h x p ad quadrilaterum x s. & eadem ratione, ut triangulum a l u ad quadratum a l, ita quadrilaterum x s ad rectangulum g x o. ex æquali igitur ut quadratum e l ad quadratum l a, ita rectangulum h x p ad rectangulum g x o.

FED. COMMANDINVS.

Sed e u l triangulum æquale est triangulo a l χ.] *Ex quarta huius.* A

Et quadrilaterum t n x s quadrilatero x r y o.] *Hoc nos supra demonstrauimus in commentarijs in quintam decimam propositionem huius libri.* B

Vt autem triangulum a l χ ad quadrilaterum a l, ita quadrilaterum x r y o ad rectangulum g x o.] *Eodem enim modo, quo supra, demonstrabimus rectangulum g x o ad quadrilaterum x r y o ita esse, ut quadratum a l ad a l χ triangulum. quare & conuertendo quadrilaterum x r y o ad rectangulum g x o erit, ut triangulum a l χ ad quadratum a l.* C

IN ALIAS DEMONSTRATIONES, QVAE AB EVTOCIO AFFERVNTVR.

Erit triangulum g k m triangulo a k t æquale; triãgulum autem h k n æquale triangulo e k p.] *Hoc enim supra demonstratum est in quinta decima propositione huius libri.* D

Et triangulo e k p æquale a κ t triangulum.] *Ex quarta huius.* E

Et quoniam triangulum m o r maius est, quàm triangulum m n k, triangulo a k t.] *Ex eadem quinta decima huius.* F

Et eadem ratione ut triangulum a l u ad quadratum a l, ita quadrilaterum x s ad rectangulum g x o.] *Vt enim quadratum a l ad triangulum a l u, ita est quadratum m o ad triangulum m o r: & ita quadratum m x ad triangulum m x k. quare reliquum rectangulum g x o ad quadrilaterum x r erit ut quadratum a l ad triangulum a l u: & conuertendo quadrilaterum x r, hoc est x s ad rectangulum g x o, ut triangulum a l u ad quadratum a l.* G

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXIIII.

Si in oppositis sectionibus, quas coniugatas appellamus, à centro ad sectiones ducantur duæ rectæ lineæ, quarum una quidem sit transuersa diameter, altera uero recta: & ducantur aliæ lineæ his diametris æquidistantes, quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant, ita ut occursus sit in loco inter quatuor sectiones intermedio; rectangulum contentum portionibus lineæ diametro transuersæ æquidistantis, unà cum eo, ad quod rectangulum ex portionibus lineæ æquidistantis rectæ diametro propor tionem habet eandem, quam diametri rectæ quadratum ad quadratum transuersæ: æquale erit duplo quadrati, quod à dimidia transuersæ diametri constituitur.

Sint oppositæ sectiones, quas coniugatas appellamus a, b, c, d, quarum centrum e: perq; e ducatur a e c trasuersa diameter; & d e b recta; & ducantur f g h i k l, m n x o p r æquidistantes ipsis a c, d b, quæ in puncto x conueniant: sit autem x prius intra angulum s e u, uel y e t. Dico rectangulum f x l unà cum eo, ad quod rectangulum m x r proportionem habet eandem, quam d b quadratum ad quadratum a c, æquale esse duplo quadrati a e. ducantur enim asymptoti sectionum s e t, y e u: & per a du-

A catur s g a u sectionem contingens. Quoniam igitur rectangulum s a u æquale est quadrato d e; erit ut rectangulum s a u ad quadratum e a, ita quadratum d e ad e a

23. sexti. 4. sexti. quadratum. rectangulum autem s a u ad quadratum e a proportionem habet compositam ex proportione s a ad a e; & ex proportione u a ad a e. sed ut s a ad a e, ita n x ad x h: & ut u a ad a e, ita p x ad x K. quare proportio quadrati d e ad quadra-

23. sexti. tum e a componitur ex proportione n x ad x h, & proportione p x ad x k. proportio autem rectanguli p x n ad rectangulum k x h composita est ex eisdem proportionibus. ut igitur quadratum d e ad e a quadratum, ita rectangulum p x n ad rectan-

22. quinti gulum k x h. & propterea ut quadratum d e ad quadratum e a, ita quadratum d e,

B unà cum rectangulo p x n ad quadratum e a unà cum rectangulo k x h. atque est qua

C dratum d e æquale rectangulo p m n, hoc est rectangulo r n m; & quadratũ a e æquale rectangulo k f h, hoc est l h f. quare ut quadratum d e ad quadratum e a, ita rectangulum p x n unà cum rectangulo r n m ad rectangulum k x h unà cum rectangulo

D l h f. rectangulum autẽ p x n unà cum rectangulo r n m æquale est rectangulo r x m. ergo ut quadratum d e ad quadratum e a, ita r x m rectangulũ ad rectangulum k x h

E una cum rectangulo k f h. Itaque demonstrare oportet rectangulum f x l unà cum rectangulo k x h, & rectangulo K f h æquale esse duplo quadrati e a. commune auferatur quadratum a e, hoc est rectangulum k f h. reliquum igitur rectãgulum K x h unà cum rectangulo l x f demonstrandum est æquale quadrato a e. quod quidem ita se habet. nam rectangulum K x h unà cum rectangulo l x f æquale est rectangulo k f h, hoc est a e quadrato.

Conueniant deinde f l, m r in una asymptoton ad punctum h. erit rectangulum f h l æquale quadrato a e; & rectangulum m h r æquale quadrato d e. quare ut quadratum d e ad quadratum e a, ita rectangulum m h r ad rectangulum f h l. & propterea ostendendum est duplum rectanguli f h l æquale duplo quadrati a e. Illud uero ita esse perspicue constat.

F Sit postremo x intra angulum s e y, uel u e t. erit similiter ob coniunctionem proportionum, ut quadratum d e ad quadratum e a, ita p x n rectangulum ad rectangulum k x h. sed quadrato d e rectangulum p m n, hoc est r n m est æquale; & qua-

G drato a e æquale rectangulum l h f. ergo ut rectangulum r n m ad rectangulum l h f ita ablatum p x n rectangulum ad ablatum rectangulum k x h. reliquum igitur re-

ctan-

ctangulum r x m ad reliquum, uidelicet ad excessum, quo quadratum a e excedit rectangulum k x h est ut quadratum d e ad quadratum e a. Itaque demonstrare oportet rectãgulum f x l unà cum excessu, quo quadratum a e excedit k x h rectangulum æquale esse duplo quadrati a e. Commune auferatur a e quadratum, hoc est rectangulum f h l. ergo demonstrandum est reliquum rectangulum k x h unà cum excessu, quo quadratum a e excedit rectangulum K x h, quadrato a e æquale esse. quod quidem ita est: nam minus, hoc est rectangulum k x h unà cum excessu est æquale maiori, uidelicet quadrato a e. H K

FED. COMMANDINVS.

A Quoniam igitur rectangulum s a u æquale est quadrato d e.] *Ex quinquagesima sexta primi, & prima secundi huius; utrumque enim est æquale quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum a c constituitur.*

B Atque est quadratum d e æquale rectangulo p m n.] *Ex undecima secundi huius.*

C Hoc est rectangulo r n m.] *Sunt enim lineæ m n, p r inter se æquales ex octaua secundi huius.*

D Rectangulum autem p x n unà cum rectangulo r n m æquale est rectãgulo r x m.] *Hoc nos demonstrauimus in commentarijs in sextum lemma Pappi.*

E Itaque demonstrare oportet rectangulum f x l unà cum rectangulo k x h.] *Est enim quadratum d b ad quadratum a c, ut quadratum d e ad quadratum e a, quod utrumque utriusque quadruplum sit. ergo ut quadratum d b ad quadratum a c, ita rectangulum r x m ad rectangulum k x h unà cum rectangulo k f h. rectangulum autem k x h unà cum rectangulo l x f est æquale rectangulo K f h, hoc est quadrato a e, quod nos in quintum Pappi lemma demonstrauimus. si igitur utrique addatur commune quadratum a e, erit rectangulum f x l unà cum rectangulo k x h, & quadrato a e, hoc est rectangulo K f h, æquale rectangulo k f h, & quadrato a e; hoc est duplo quadrati a e. quod quidem demonstrare oportebat.*

F Erit similiter ob coniunctionem proportionum, ut quadratum d e ad quadratum e a.] *Hoc demonstrabitur eadem prorsus ratione, qua supra usi fuimus.*

G Reliquum igitur rectangulum r x m ad reliquum uidelicet ad excessum, quo quadratum a e excedit rectangulum k x h.] *Nam rectangulum p m n, hoc est r n m excedit p x n rectangulum, rectangulo r x m, ut demonstrauimus. quare reliquum rectangulum r x m ad reliquum, quo rectangulum l h f, hoc est quadratum a e excedit rectangulum k x h, erit ut rectangulum r n m ad rectangulum l h f, hoc est ut quadratum d e ad quadratum e a, uidelicet ut quadratum d b ad quadratum a c.*

H Est ut quadratum d e ad quadratum e a.] *Hæc nos addidimus, quæ desiderari uidebantur.*

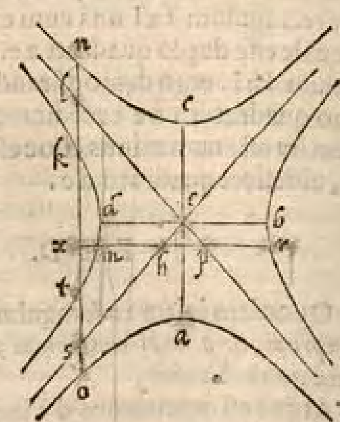
K Ergo demonstrandum est reliquum rectangulum k x h unà cum excessu, quo quadratum a e excedit rectangulum k x h quadrato a e æquale esse.] *Rectangulum enim f x l excedit rectangulum f h l, rectangulo K x h.*

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

IISDEM positis, sit linearum ipsis a c, b d æquidistantium occursus in una sectionum d b, atque in puncto x, ut positum est. Dico rectangulum contentum portionibus lineæ, quæ transuersæ diametro æquidistat, uidelicet o x n, maius esse, quàm illud, ad quod rectangulum ex portionibus lineæ æquidistantis rectæ diametro, hoc est r x m, eandem proportionem habet, quam rectæ diametri quadratum ad quadratũ trãsuersæ, duplo quadrati eius, quod à dimidia transuersæ diametri cõstituitur.

A Est enim propter eãdem rationem, ut quadratum d e ad quadratum e a, ita rectangulum p x h ad rectangulum s x l. quadratum autem d e æquale est rectangulo p m h; B

11.2. lib. C & quadratum e a æquale rectangulo l k s. ergo ut quadratum d e ad quadratum e a, ita p m h rectangulum ad rectangulum l k s. Itaque quoniam ut totum rectangulum p x h ad totum l x s,
D ita ablatum rectangulum p m h ad ablatum l k s, hoc
4 lem. Pap. E est ad l t s; erit & reliquum r x m ad reliquum t x K, ut d e quadratum ad quadratum e a. ostendere igitur oportet rectangulum o x n maius esse, quàm rectangulum t x k, duplo quadrati a e. commune auferatur
5 lem. Pap. F t x k. ergo ostendendum relinquitur rectãgulum o t n
23.2. lib. G æquale duplo quadrati a e; hoc autem ita esse manifesto apparet.



FED. COMMANDINVS.

A Est enim propter eandem rationem, ut quadratum d e ad quadratum e a.] *Ex demonstratis in antecedente.*

B Quadratum autẽ d e æquale est rectangulo p m h.] *Ex undecima secundi huius, ut dictum est.*

C Et quadratum e a æquale rectangulo l k s.] *Ex decima secundi huius, ita uero corrigendum est, nam in græco codice legitur* λ ο σ *& ita inferius in multis locis.*

D Ita ablatum rectangulum p m h ad ablatum l k s hoc est ad l t s.] *Nos hæc ita restituimus, in græco enim codice legebatur,* οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ π μ θ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ λ ο σ, τοῦ τέστι τὸ ὑπὸ υ σ ο: *hoc est ita ablatum rectangulum p m h ad ablatum l o s, hoc est ad y s o.*

E Erit & reliquum r x m ad reliquum t x k, ut d e quadratum ad quadratum e a.] *Nam rectangulum p x h superat rectangulum r x m, rectangulo p m h, ex quarto lemmate Pappi; rectangulum uero l x s ex sexto lemmate eiusdem superat rectangulum t x k, rectangulo l k s.*

F Commune auferatur t x k. ergo ostendendum relinquitur rectangulum o t n æquale duplo quadrati a e.] *Rectangulum enim o x n est æquale rectangulo t x K unà cum rectangulo o t n.*

ex 2. parte 5. lem.

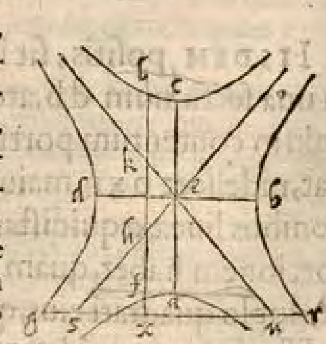
G Hoc autem ita esse manifesto apparet.] *Ex uigesima tertia secundi huius.*

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVI.

QVOD si æquidistantium occursus ad punctum x sit in una sectionum a c, ut positum est; rectangulum, quod continetur portionibus lineæ æquidistantis transuersæ diametro, hoc est l x f minus erit, quàm illud, ad quod rectangulum portionibus alterius lineæ contentum, hoc est r x g, eandem proportionem habet, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transuersæ, duplo quadrati eius, quod à dimidia transuersæ diametri constituitur.

Quoniam enim propter eadem, quæ prius dicta sunt,
A ut quadratum d e ad quadratum e a, ita est u x s rectan-
B gulum ad rectangulum k x h: habebit totum rectangulum r x g ad rectangulum k x h unà cum quadrato a e, proportionem eandem, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transuersæ. ergo demonstrare oportet rectangulũ l x f minus esse, quàm rectangulum k x h unà cum quadrato a e, duplo a e quadrati. commune auferatur quadratum a e. reliquum igitur rectangulum l x f demonstrandum est minus, quàm k x h, quadrato a e; hoc est rectangulo l h f: quod quidem ita se habet.
C nam rectangulum l h f unà cum l x f æquale est rectangulo k x h.

61



FED.

FED. COMMANDINVS.

Vt quadratum d e ad quadratum e a, ita est u x s rectangulum ad rectangulum A
k x h. *Ob compositionem uidelicet proportionum.*

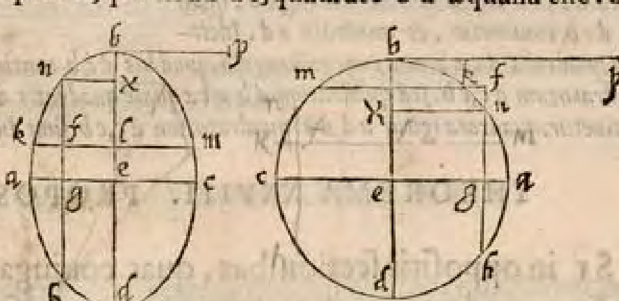
Habebit totum rectangulum r x g ad rectangulum k x h unà cum quadrato a e, B
proportionem eandem, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transuersæ.] *Quoniam enim est ut quadratum d e ad quadratum e a, ita rectangulum u x s ad rectangulum k x h: erit quoque ut quadratum d e ad quadratum e a, ita quadratum d e unà cum rectangulo* 12.quinti
u x s ad quadratum e a unà cum rectangulo k x h. sed quadrato d e æquale est rectangulum u g s hoc est r s g. quare ut quadratum d e ad quadratum e a, ita rectangulum u x s unà cum r s g rectangulo ad rectangulum K x h unà cum quadrato a e: rectangulum autem u x s unà cum rectangulo r s g est æquale rectangulo r x g ex quinto lemmate. ut igitur quadratum d e ad quadratum e a, hoc est, ut rectæ diametri quadratum ad quadratum transuersæ, ita rectangulum r x g ad rectangulum k x h unà cum a e quadrato.

Nam rectangulum l h f unà cum l x f æquale est rectangulo k x h.] *Ex quarto lemmate Pappi.* C

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVIII.

Si in ellipsi, uel circuli circumferentia coniugatæ diametri ducantur, quarum altera quidem sit recta, altera uero transuersa: & ducantur duæ rectæ lineæ diametris æquidistantes, quæ & sibi ipsis & sectioni occurrant: quadrata ex portionibus lineæ æquidistantis transuersæ diametro, quæ inter sectionem, & linearum occursum interiiciuntur; assumentia figuras ex portionibus lineæ, quæ rectæ diametro æquidistat, inter linearum occursum, & sectionem interiectis, similes, & similiter descriptas ei, quæ ad rectam diametrum constituitur, quadrato transuersæ diametri æqualia erunt.

Sit ellipsis, uel circuli circumferentia a b c d, cuius centrum e: ducanturq; ipsius duæ coniugatæ diametri, recta quidem a e c, transuersa uero b e d. & ducantur k f l m, n f g h, quæ ipsi a c, b d æquidistent. Dico quadrata n f, f h assumentia figuras ex k f, f m similes, & similiter descriptas ei, quæ fit ad a c, quadrato b d æqualia esse. ducatur enim à puncto n linea n x æquidistans a e, quæ ad b d ordinatim applicata erit: & b p sit rectum figuræ latus. Quoniam igitur ut b p ad a c, ita est a c ad b d; erit ut p b ad b d, ita a c quadratum ad quadratum b d. quadratum autem b d est æquale figuræ, quæ ad a c constituitur. ergo



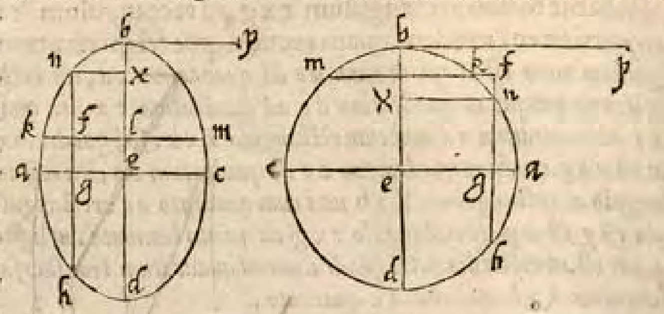
A cor.20.sexti B

ut p b ad b d, ita quadratum a c ad figuram quæ est ad a c. sed ut quadratum a c ad figuram, quæ ad a c, ita quadratum n x ad figuram, quæ fit ab n x similem ei, quæ ad a c. ergo & ut p b ad b d, ita quadratum n x ad figuram, quæ ab n x, similem ei, quæ ad a c. est autem & ut p b ad b d, ita n x quadratum ad rectangulum b x d. quare figura, quæ fit ab n x, hoc est ab f l, similis ei, quæ ad a c, rectangulo b x d est æqualis. C 9.quinti.
Eodem modo demonstrabimus figuram, quæ fit à k l, similem illi, quæ ad a c, rectangulo b l d æqualem esse. Et quoniam recta linea n h secatur in partes æquales in g, D
& in partes inæquales in f; quadrata h f, f n dupla sunt quadratorum h g, g f, hoc est n g, g f. eadem quoque ratione quadrata m f, f k quadratorum k l, l f sunt dupla: &

figuræ, quæ fiunt ab m f, f k, similes ei, quæ ad a c, duplæ sunt figurarum similium, quæ à κ l, l f. figuræ autem, quæ fiunt a κ l, l f rectangulis b l d, b x d sunt æquales: & quadrata n g, g f æqualia sunt quadratis x e, e l. ergo quadrata n f, f h unà cum figuris k f, f m similibus ei, quæ ad a c, dupla sunt rectangulorum b l d, b x d, & quadratorum x e

5. secũdi e l. Itaque quoniam recta linea b d secatur in partes æquales in e, & in partes inæquales in x; rectangulũ b x d unà cum x e quadrato æquale est quadrato b e. Similiter & rectãgulum b l d unà cum quadrato l e æquale est b e quadrato. quare rectangula b x d, b l d, & quadrata x e,

62.



l e æqualia sunt duplo quadrati b e. quadrata igitur n f, f h unà cum figuris k f, f m similibus ei, quæ ad a c, dupli quadrati b e sunt dupla. atque est quadratum b d duplũ dupli quadrati b e. ergo quadrata n f, f h assumentia figuras k f, f m similes ei, quæ ad a c, quadrato b d æqualia erunt.

FED. COMMANDINVS.

A Quoniam igitur ut b p ad a c, ita est a c ad b d.] *Ex diffinitione secundæ diametri, quæ mediam proportionem habet inter figuræ latera.*

B Quadratum autem b d est æquale figuræ, quæ ad a c constituitur.] *Habet enim b d mediam proportionem inter latera figuræ, quæ fit ad a c, ex decima quinta primi huius.*

C Est autem & ut p b ad b d, ita n x quadratum ad rectangulum b x d.] *Ex uigesima prima primi huius.*

D Et quoniam recta linea n h secatur in partes æquales in g, & in partes inequales in f, quadrata h f, f n dupla sunt quadratorum h g, g f.] *Hoc demonstrauit Euclides in secundo libro elementorum, propositione nona. sed & aliter demonstrare possumus, hoc pacto.*

63.

Secetur recta linea a b in partes æquales ad punctum c, & in partes inæquales ad d. Dico quadrata a d, d b quadratorum d c, c b dupla esse.] *Quoniam enim a c, c b æquales sunt, erit a d linea, qua b c ipsam c d superat. ergo ex iis, quæ demonstrauimus in trigesimam tertiam propositionem primi huius, quadrata d c, c b æqualia sunt rectangulo, quod bis d c b continetur, & quadrato a d. Idcircoq; quadrata d c, c b unà cum rectangulo, quod bis d c b continetur, & quadrato a d, dupla sunt*

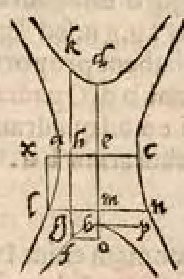
4. secũdi *quadratorum d c, c b. sed quadratum d b est æquale quadratis d c, c b, & rectangulo, quod bis d c b continetur. quadrata igitur a d, d b quadratorum d c, c b sunt dupla. quod demonstrare oportebat.*

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXVIII.

SI in oppositis sectionibus, quas coniugatas appellamus, coniugatæ diametri ducantur, ut earum altera recta sit, altera transuersa: & ducantur duæ rectæ lineæ diametris æquidistantes, quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant: quadrata ex portionibus lineæ æquidistantis rectæ diametro, quæ inter linearum occursum, & sectiones interiiciuntur, ad quadrata ex portionibus alterius lineæ, quæ transuersæ diametro æquidistat, inter sectiones & occursum linearum interiectis; eandem proportionem habent, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transuersæ.

Sint

Sint oppositæ sectiones, quæ coniugatæ appellantur a b c d, quarum diameter quidem recta sit a e c, transuersa uero b e d: & ipsis æquidistantes ducãtur f g h k, l g m n, quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant. Dico quadrata l g, g n ad quadrata f g, g k eandem proportionem habere, quam a c quadratum ad quadratum b d. à punctis enim l f ordinatim applicentur l x, f o, quæ æquidistantes erunt diametris a c, b d: & à puncto b ducatur ipsius b d rectum latus b p. Itaque constat ut p b ad b d, ita esse A quadratum a c ad b d quadratum, & quadratum a e ad quadratum e b; & quadra- B C tum f o ad rectangulum b o d; & rectangulum c x a ad quadra- D tum l x. est igitur sicut unum antecedentium ad unum conse- E quentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. quare ut quadratum a c ad quadratum b d, ita rectangulum c x a una cum quadrato a e, & quadrato o f, hoc est e h, ad rectangulum d o b una cum quadrato b e, & quadrato l x, hoc est m e. sed rectangulum c x a una cum quadrato a e æquale est quadrato x e: & rectangulum d o b una cum quadrato b e æquale quadrato o e. ergo ut a c quadratum ad quadratũ b d, ita sunt quadrata x e, e h ad quadrata o e, e m; hoc est quadrata l m, m g ad quadrata f h, h g. quadratorum autem l m, m g dupla sunt quadrata l g, g n, ut demonstratum est: & quadratum f h, h g quadrata f g, g k sunt dupla. ut igitur quadratum a c ad quadratum b d, ita l g, g n quadrata ad quadrata f g, g k. F



6. secũdi.

FED. COMMANDINVS.

A Itaque constat, ut p b, ad b d, ita esse quadratum a c ad b d quadratum.] *Est enim a c proportionalis inter p b, b d, ex diffinitione secundæ diametri. quare per corollarium decimæ nonæ sexti, ut p b ad b d, ita quadratum p b ad quadratum a c; & ita quadratum a c ad b d quadratum.*

B Et quadratum a e ad quadratum e b.] *Ex 15. quinti.*

C Et quadratum f o ad rectangulum b o d.] *Nam ex uigesima prima primi huius, ut figuræ rectum latus ad transuersum, hoc est ut p b ad b d, ita f o quadratum ad rectangulum b o d.* D

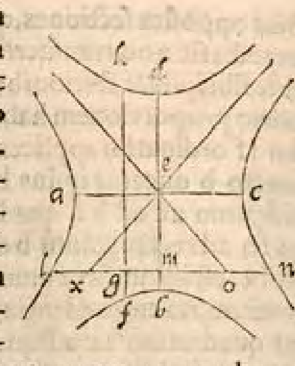
Et rectangulum c x a ad quadratum l x.] *Est enim ex eadem 21. primi huius, ut sectionis a transuersum latus ad rectum, hoc est ut quadratum a c ad quadratum b d, ita rectangulum c x a ad quadratum l x.*

E Est igitur sicut unum antecedentium ad unum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia.] *Ex 12. quinti.*

F Quadratorum autem l m, m g dupla sunt quadrata n g, g l, ut demonstratum est.] *In secundo libro elementorum propositione nona, ut diximus.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXIX.

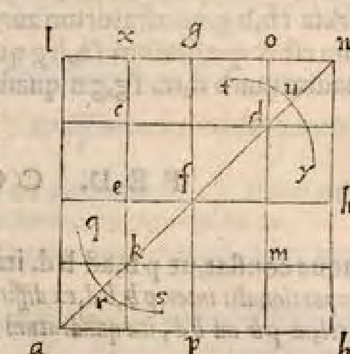
Iisdem positis si linea rectæ diametro æquidistans secet asymptotos; quadrata ex portionibus ipsius, quæ inter linearum occursum, & asymptotos interiiciuntur, assumentia dimidium quadrati facti à recta diametro, ad quadrata ex portionibus lineæ, quæ transuersæ diametro æqui distat, inter occursum linearum, & asymptotos interiectis, eandem proportionem habent, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transuersæ.



Sint eadem, quæ supra: & linea l n secet asymptotos in A punctis x o. demonstrandum est, quadrata x g, g o assumen B tia dimidium quadrati a c, hoc est duplũ quadrati e a, hoc est duplum rectanguli l x n, ad quadrata f g, g k eandẽ pro portionem habere, quam a c quadratum ad quadratũ b d. C Quoniam enim l x æqualis est o n, quadrata l g, g n superant quadrata x g, g o duplo rectanguli l x n. ergo quadrata x g, g o una cum duplo quadrati a e, æqualia sunt qua- D dratis l g, g n. sed l g, g n quadrata ad quadrata f g, g k eandem habent proportionem, quam quadratum a c ad quadratum b d. Quadrata igitur x g, g o una cum duplo quadrati e a ad quadrata f g, g k eandem proportionem habent, quam a c quadratum ad quadratum b d.

EVTOCIVS.

E Quoniam enim l x æqualis est o n; quadrata l g, g n superant quadrata x g, g o, duplo rectanguli l x n.] *Sit recta linea l n; auferanturq; ab ipsa æquales l x, n o; & figura describatur. manifestum est ob similitudinem, & propterea quòd linea l x est æqualis n o, quadrata l c, d n, a k, m b inter se æqualia esse. Quoniam igitur quadrata, quæ fiunt ex l g, g n, sunt quadrata a f, f n: & quæ ex g x, g o sunt k f, f d; sequitur ut quadrata ex l g, g n superent quadrata ex g x, g o, gnomonibus q r s, t u y. Quòd cum rectangulum g d sit æquale rectangulo m p, & rectangulum e i ipsi m b; erunt gnomones q r s, t u y æquales rectangulis a m, d b. sed a m est æquale l d; rectangula uero l d, d b sunt, quæ l x n, hoc est l o n continentur. ergo quadrata ex l g, g n, hoc est a f, f n, superant quadrata ex g x, g o, hoc est k f, f d, duplo rectanguli l x n, hoc est rectangulis l d, d b.*



FED. COMMANDINVS.

A Assumentia dimidium quadrati a c, hoc est duplum quadrati e a.] *Cum enim linea a c dupla sit ipsius a e, erit quadratum a c quadrati a e quadruplum, ex 20. sexti.*

B Hoc est duplum rectanguli l n x.] *Ex 10. secũdi huius, & ex diffinitione secundæ diametri.*

C Quoniam enim l x æqualis est o n, quadrata l g, g n superant quadrata x g, g o duplo rectanguli l x n.] *Constat etiam hoc ex octauo lemmate Pappi.*

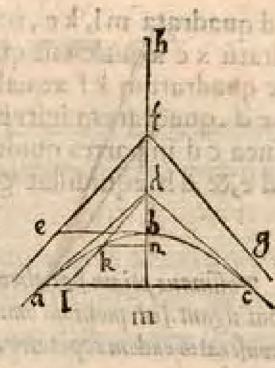
D Sed l g, g n quadrata ad quadrata f g, g k eandem habent proportionẽ, quam quadratum a c ad quadratum b d.] *Ex antecedente.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

Si hyperbolen contingentes duæ rectæ lineæ sibi ipsis occurrant: & per tactus linea producatur: per occursum uero ducatur linea uni asymptoton æquidistans; sectionemq; & lineam coniungentem tactus secãs: quæ interiicitur inter occursum, & lineam tactus coniungentem à sectione bifariam diuidetur.

Sit hyperbole a b c, quam contingant rectæ lineæ a d, d c. asymptoti uero sint e f, f g: & iuncta a c, ducatur per d linea d k l æquidistans e f. Dico d k ipsi k l æqualem esse. iungatur enim f d, b m, & ex utraque parte producatur, ut sit f h æqualis f b. & per

b k



h k; ducantur b e, k n æquidiſtantes a c, quæ ordinatim appli
catæ erunt. & quoniam triangulum f e b ſimile eſt triangulo
d k n, erit ut quadratum d n ad quadratum n k, ita quadra- 4. ſexti
tum f b ad b e quadratum. Vt autem quadratum f b ad qua 22
dratum b e, ita linea h b ad rectum latus. quare ut quadratũ A
d n ad quadratum n k, ita h b ad rectum latus. ſed ut h b ad
rectum latus, ita rectangulum h n b ad quadratum n k. ut B
igitur quadratum d n ad quadratum n k, ita h n b rectangu
lum ad quadratum n k. ergo rectangulum h n b quadrato 9. quinti.
d n eſt æquale. eſt autem & rectangulum m f d æquale qua- C
drato f b, propterea quòd linea a d ſectionem contingit, &
a m ordinatim eſt applicata. quare rectangulum h m b unà D
cum quadrato b f æquale eſt rectangulo m f d unà cum d n quadrato. ſed rectangu- E
lum h n b unà cum quadrato b f eſt æquale quadrato f n. ergo & rectangulum m f d
unà cum quadrato d n æquale eſt quadrato f n: idcircoq; linea d m ad punctum n bi F
fariam ſecatur, adiunctam habens d f. & K n, l m æquidiſtantes ſunt. linea igitur d k ip 2. ſext
ſi k l eſt æqualis.

FED. COMMANDINVS.

Vt autem quadratum f b ad quadratum b e, ita linea h b ad latus rectum.] *Ex demonſtratis in prima ſecundi huius.* A

Sed ut h b ad rectum latus, ita rectangulum h n b ad quadratum n K.] *Ex uigeſima prima primi huius.* B

Eſt autem & rectangulum m f d æquale quadrato f b, propterea quòd linea a d ſectionem contingit, & a m ordinatim eſt applicata.] *Ex 37. primi huius.* C

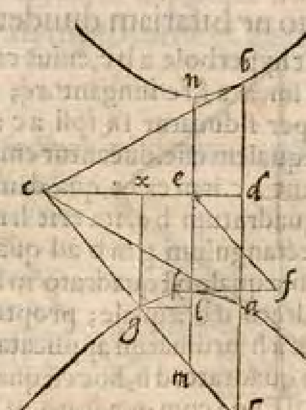
Quare rectangulum h n b unà cum quadrato b f æquale eſt rectangulo m f d unà cum d n quadrato.] *Si enim æqualibus æqualia addantur, quæ fient æqualia erunt.* D

Sed rectangulum h n b unà cum quadrato b f eſt æquale quadrato f n.] *Ex 6. ſecundi elementorum.* E

Idcircoq; linea d m ad punctum n bifariam ſecatur adiunctam habens d f.] *Ex nono lemmate Pappi & iis, quæ in ipſum conſcripſimus.* F

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

Si oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant: & per tactus linea producatur: per occurſum uero ducatur linea aſymptoto æquidiſtans, quæ ſectionem & lineam tactus coniungentem ſecet: linea inter occurſum, & eam, quæ tactus coniungit, interiecta à ſectione bifariam diuidetur.



Sint oppoſitæ ſectiones a b; & contingentes lineæ
a c, c b: iunctaq; a b producatur: aſymptotos uero ſit
e f: & per c ducatur c g h, ipſi e f æquidiſtans. Dico
c g æqualem eſſe g h. iungatur enim c e, & ad d pro-
ducatur: & per e g ducantur e K m n, g x ipſi a b
æquidiſtantes: & per K g ducantur k f, g l æquidiſtan-
tes c d. Quoniam igitur triangulum k f e ſimi-
le eſt triangulo m l g, ut quadratum e K ad quadratũ
k f, ita erit m l quadratum ad quadratum l g. ſed ut 4. ſexti
quadratum e K ad quadratum k f, ita demonſtratum 22
eſt n l k rectangulum ad quadratum l g. ergo rectan- A
gulum n l k quadrato m l eſt æquale. commune appo 9. quitſ.
natur quadratum k e. rectangulum igitur n l k, unà 6. ſecũdi.
cum quadrato K e, hoc eſt quadratum l e, hoc eſt g x, 14. quinti
æquale eſt quadratis m l, k e. ut autem quadratũ g x B

14. quīti ad quadrata m l, k e, ita quadratum x c ad quadrata l g, k f. ex quibus sequitur quadratū x c æquale esse quadratis g l, k f. atque est quadratū g l æquale quadrato x e:
C D & quadratum k f æquale quadrato dimidiæ secundæ diametri, hoc est rectangulo
E c e d. quadratum igitur c x quadrato x e, & rectãgulo c e d est æquale: ac propterea linea c d in partes quidem æquales secatur ad punctum x, in partes uero inæquales
2. sexti ad e, & d h æquidistat g x. ergo c g ipsi g h æqualis erit.

EVTOCIVS.

Possumus etiam hoc theorema demonstrare, ut antecedens, si duæ rectæ lineæ sectionem unam contingant. sed quoniam omnino idem est, atque illud, quod in una hyperbola demonstratum fuit, demonstratio eadem repetatur.

FED. COMMANDINVS.

A Sed ut quadratum e k ad quadratum k f, ita demonstratum est n l k rectangulum ad quadratum l g.] *In antecedente scilicet.*

B Vt autem quadratū g x ad quadrata m l, k e, ita quadratum x c ad quadrata l g, k f.] *Nam ob similitudinem triangulorum c x g, g l m, f k e, ut linea g x ad x c, ita erit e k ad k f: & permutando ut g x ad e k, ita x c ad k f & eadem ratione demonstrabitur ut m l ad e k, ita l g ad k f. quare & componendo, ut m l, e k, ad e k, ita l g, k f ad k f: conuertendoq; ut e k ad m l, e k, ita k f ad l g, k f. Quoniam igitur ut g x ad e k, ita x c ad k f: & ut e k ad*
22. sexti *m l, e k, ita k f ad l g, k f: erit ex æquali ut g x ad m l, e k, ita x c ad l g, k f. ergo ut quadratum g x ad m l, e k quadrata, ita quadratum x c ad quadrata l g, k f.*

C Et quadratum k f æquale quadrato dimidiæ secundæ diametri.] *Quadratum enim k f est æquale quartæ parti figuræ, quæ fit ad diametrum k n, ex prima secundi huius: & cum secunda diameter mediam proportionem habeat inter figuræ latera, erit dimidiæ ipsius quadratum itidem æquale quartæ parti figuræ.*

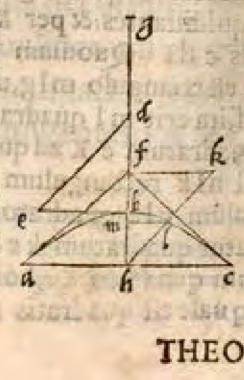
D Hoc est rectangulo c e d.] *Ex 38. primi huius.*

E Ac propterea linea c d in partes quidem æquales secatur ad punctum x, in partes uero inæquales ad e.] *Ex decimo lemmate Pappi.*

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXII.

Si hyperbolæ duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occurrant: & per tactus linea producatur: per occursum uero contingentium ducatur linea, tactus coniungenti æquidistans: & per punctum, quod coniungentem tactus bifariam secat, ducatur linea æquidistans alteri asymptoton: quæ inter dictum punctum, & lineam æquidistantem intercipitur, à sectione bifariam diuidetur.

Sit hyperbole a b c, cuius centrum d & asymptotos d e: contingant autem sectio-
30. secūdi huius. nem lineæ a f, f c iunganturq; c a; & f d, & ad g h producatur. erit a h æqualis h c. itaque per f ducatur f k ipsi a c æquidistans: & per h, h l k æquidistans d e. Dico k l ipsi l h æqualem esse. ducantur enim per b l lineæ b e, l m, quæ æquidistent a c. iam ex iis, quæ demonstrata sunt, ut quadratum d b ad quadratum b e, ita erit h m quadratum ad quadratum m l;
9. quinti. & rectangulum g m b ad quadratum m l. rectangulum igitur
37. primi huius. g m b æquale est quadrato m h. est autem & h d f rectangulum quadrato d b æquale; propterea quòd a f sectionem contingit, & a h ordinatim applicata est. ergo rectangulum g m b unà
6 secundi cum quadrato d b, hoc est quadratum d m æquale est rectangu-
11. lemma Pappi. lo h d f unà cum quadrato m h: & ideo linea l h bifariam secatur in m, adiunctam habens d f: suntq; k f, l m æquidistantes.
2. sexti æqualis igitur est k l ipsi l h.

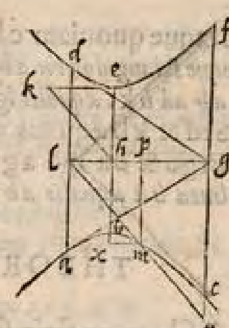


THEO-

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occurrant: & per tactus linea producatur: per occursum uero cõtingentium ducatur linea tactus coniungenti æquidistãs: & per punctum, quod coniungentem tactus bifariam secat, ducatur linea æquidistans alteri asymptoton, coueniensq; cum sectione, & cum linea æquidistante per occursum ducta: quæ inter dictum punctum, & lineam æquidistantem interiicitur, à sectione bifariam diuidetur.

Sint oppositæ sectiones a b c, d e f & contingentes lineæ a g, g d: centrum autem sit h, & asymptotos h k; ductaq; h g producatur: & iuncta a l d, quæ bifariam secabitur in l, ducantur per g, h lineæ c g f, b h e ipsi a d æquidistantes: & per l ducatur l m n æquidistans h k. Dico l m æqualem esse m n. applicentur enim à punctis e m lineæ e k, m x æquidistantes g h: & per m ducatur m p æquidistans a d. Quoniam igitur ex ijs, quæ ante demonstrata sunt, ut quadratum h e ad quadratum e k, ita est rectangulum b x e ad quadratum x m: erit ut h e quadratum ad quadratum e k, ita rectangulum b x e unà cum quadrato h e; hoc est quadratum h x ad quadrata k e, x m. quadratum autem k e ostensum est æquale rectangulo g h l & quadratum x m æquale est quadrato h p. ut igitur quadratum h e ad quadratum e k, ita quadratum h x, hoc est m p ad rectangulum g h l unà cum quadrato h p. sed ut quadratum h e ad quadratum e k, ita est quadratum m p ad quadratum p l. quare ut quadratũ m p ad quadratum p l, ita quadratum m p ad rectangulum g h l unà cum quadrato h p: & propterea quadratum l p rectãgulo g h l unà cum quadrato h p æquale erit. ergo recta linea l g in partes æquales secatur ad p, & in partes inæquales ad h. & sunt æquidistantes m p, g n. linea igitur l m ipsi m n est æqualis.

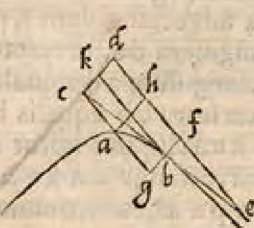


37. secundi huius.
12. quinti
38 primi huius.
70
4. sexti
22.
9. quinti.
19 lemma Pappi.
2 sexti.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XXXIIII.

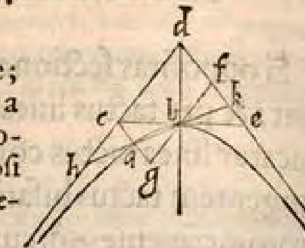
Si in una asymptoton hyperbolæ aliquod punctum sumatur: ab eoq; recta linea sectionem contingat: & per tactum ducatur æquidistãs asymptoto: quæ per dictum punctum transit, alteri asymptoton æquidistans, à sectione bifariam diuidetur.

Sit hyperbole a b, asymptoti uero c d, d e: & sumpto in linea c d quouis puncto c per ipsum ducatur c b e sectionem contingens: & per b quidem ducatur f b g æquidistans c d; per c autem c a g, quæ ipsi d e æquidistet. Dico lineam c a æqualem esse a g. ducatur enim per a linea a h, æquidistans c d; & per b linea b k, æquidistans d e. Itaque quoniam c b æqualis est b e, erit & c k ipsi k d; & d f ipsi f e æqualis. quòd cum rectangulum k b f æquale sit rectangulo c a h, & linea b f æqualis d k, hoc est c k, & a h ipsi d c: rectangulum d c a æquale erit rectangulo k c g. Vt igitur d c ad c k, ita c g ad a c. est autem d c ipsius c k dupla. ergo & c g dupla c a: idcircoq; linea c a ipsi a g est æqualis.



71
A B
C
D

EVTOCIVS.



ALITER. Sit hyperbole a b, cuius asymptoti c d, d e; & contingens c b e. æquidistantes autem c a g, f b g. Dico c a ipsi a g æqualem esse. coniungatur enim a b, & ad h k producatur. Itaque quoniam c b æqualis est b e; erit & k b ipsi
E
F G b a æqualis. sed & k b est æqualis a h. ergo & c a ipsi a g æqualis erit.

FED. COMMANDINVS.

A Itaque quoniam c b æqualis est b e.] *Ex tertia secundi huius.*
B Erit & c K ipsi k d, & d f ipsi f e æqualis.] *Ex secunda sexti.*
C Quòd cum rectangulum κ b f æquale sit rectangulo c a h.] *Ex 12. secundi huius.*
D Vt igitur d c ad c k, ita c g ad a c.] *Ex 15. sexti.*

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM QVAM AFFERT EVTOCIVS.

E Itaque quoniam c b æqualis est b e, erit & κ b ipsi b a æqualis.] *Ob similitudinem namque triangulorum a b c, K b e, erit ut c b ad b a, ita e b ad b k: & permutando ut c b ad b e, ita a b ad b k. æqualis igitur est k b ipsi b a.*

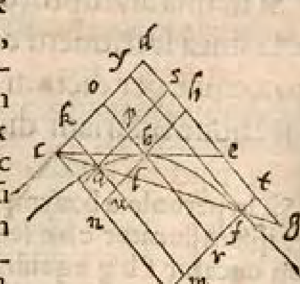
F Sed & k b æqualis a h.] *Ex octaua secundi huius. unde sequitur & b a æqualem esse a h.*

G Ergo & c a ipsi a g æqualis erit.] *Cum enim triangulum a b g sit æquale triangulo a b c, & linea b a æqualis a h; rursus eadem ratione demonstrabitur linea c a æqualis a g.*

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XXXV.

Iisdem positis si à sumpto puncto recta linea ducatur, sectionem in duobus punctis secans; erit ut tota ad eam, quæ extra sumitur, ita inter se se portiones illius, quæ intra sectionem continetur.

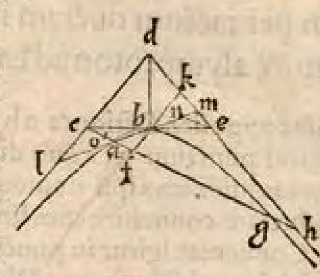
Sit a b hyperbole, cuius asymptoti c d, d e; contingensq; c b e; & h b æquidistans: ducatur autem per c recta linea c a l f g, quæ sectionem in punctis a f secet. Dico ut f c ad c a, ita esse f l ad l a. ducantur enim per puncta c a b f lineæ c n x, κ a u m, o p b r, f y, ipsi d e æquidistantes: & per a f ducantur a p s, t f r m x



A æquidistantes c d. Quoniam igitur æqualis est a c ipsi f g,
34. primi. erit & k a æqualis t g. sed k a est æqualis d s. ergo & t g ip-
B si d s est æqualis: & propterea c k ipsi d y. Rursus quoniam c K æqualis est d y; & d k ipsi c y æqualis erit. Vt igitur d κ
C D ad k c, ita y c ad c κ. & ut y c ad c K, ita f c ad c a. sed ut f c
1. sexti. ad c a, ita m k ad k a: & ut m k ad k a, ita m d rectangulũ ad rectangulum d a. Vt autem d k ad k c, ita rectangulum h k ad rectangulum K n. ergo ut rectangulum m d ad re-
E ctangulum d a, ita rectangulum h k ad ipsum k n. atque est
F rectangulum a d æquale rectangulo d b, hoc est ipsi o n: est enim linea c b æqualis b e, & d o ipsi o c. quare ut rectangulum d m ad o n, ita h k
19. quinti ad k n. reliquum igitur m h ad reliquum b k est, ut totum d m ad totum o n. Quòd cum rectangulum k s æquale sit h o, commune auferatur d p. erit reliquum k p reli-
G quo p h æquale. commune apponatur a b. totum igitur k b æquale est a h: & ut m d
1. sexti. ad d a, ita m h ad h a. sed ut m d ad d a, ita linea m k ad K a, hoc est f c ad c a. Vt au-
4. sexti. tem m h ad h a, ita m u ad u a, hoc est f l ad l a. ergo ut f c ad c a, ita f l ad l a.

EVTOCIVS.

ALITER. Sit hyperbole a b, cuius aſymptoti c d, d e: & à puncto c linea quidē c b ducta ſectionem contingat; c a g h uero in duobus punctis ſecet & per b ducatur f b k ipſi c d æquidiſtans. itaque demonſtrare oportet ut g c ad c a, ita eſſe g f ad f a. coniungatur enim a b, atque ad l m producatur & à pū cto e ducatur e n æquidiſtans c h. Quoniam igitur c b æqualis eſt b e, & c a ipſi e n eſt æqualis, & a b ipſi b n. ſed cum b m ſit æqualis l a, erit n m exceſſus linearum l a, a b. Et quoniam in triangulo a m h ducta eſt e n ipſi a h æquidiſtans, ut a m ad m n, ita erit a h ad n e. & eſt n e æqualis a c. Vt igitur h a ad a c, ita a m ad exceſsū linearum a b, b m, hoc eſt l b ad exceſſum linearum l a, a b. Vt autem h a ad a c, ita g c ad c a eſt enim c a æqualis h g. ergo ut g c ad c a, ita l b ad exceſſum linearum l a, a b; & c f ad exceſſum linearum c a, a f. ſed quoniam quærebatur, ſi ut g c ad c a, ita ſit g f ad f a, demonſtrare oportet, ut tota g c ad totam c a, ita eſſe g f ablatam ad ablatam f a, & reliquam c f ad reliquam, uidelicet ad exceſſum linearum c a, a f. quare demonſtrandum eſt ut g c ad c a, ita c f ad exceſſum linearum c a, a f.



8. ſecundi huius. 4. ſexti

8 ſecundi huius.

H

K

FED. COMMANDINVS.

Quoniam igitur æqualis eſt a c ipſi f g, erit & K a æqualis t g.] *Linea a c eſt æqualis f g ex octaua ſecundi huius, quare ob ſimilitudinem triangulorum a κ c, g f t, eodem, quo ſupra, modo demonſtrabitur K a ipſi t g æqualis.* A

Et propterea c k ipſi d y.] *Eſt enim ſimiliter c k æqualis f t, hoc eſt ipſi d y.* B

Et ut y c ad c K, ita f c ad c a.] *Ex quarta ſexti ob ſimilitudinem triangulorum f c y, a c κ.* C

Sed ut f c ad c a, ita m κ ad κ a.] *Ob ſimilitudinem triangulorum a c κ, a f m.* D

Atque eſt rectangulum a d æquale rectangulo d b.] *Ex 12. ſecundi huius.* E

Hoc eſt ipſi o n, eſt enim linea c b æqualis b e.] *Nam cum ſit linea c b æqualis b e ex tertia ſecundi huius, erit ob ſimilitudinem triangulorum c b n, e b h, & h b æqualis b n, idcircoq; rectangulum h o rectangulo o n æquale.* F

Et ut m d ad d a, ita m h ad h a.] *Superius enim demonſtrauit, ut rectangulum m d ad d a, ita eſſe m h ad h k.* G

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM
QVAM SCRIBIT EVTOCIVS.

Et c f ad exceſſum linearum c a, a f.] *Nanque ut g c ad c a, ita eſt l b ad exceſſum linearum l a, a b: ut autem l b ad exceſſum linearum l a, a b, ita c f ad exceſſum linearum c a, a f, quod mox demonſtrabimus. ergo ut g c ad c a, ita c f ad exceſſum c a, a f. eſt enim ob ſimilitudinem triangulorum a c l, a f b, ut l a ad a b, ita c a ad a f: & diuidendo ut exceſſus, quo l a excedit a b ad ipſam a b, ita exceſſus, quo c a excedit a f ad ad a f, & conuertendo. Rurſus quoniam ut l a ad a b, ita c a ad a f; erit componendo ut l b ad b a, ita c f ad f a. Sed ut a b ad exceſſum, quo l a excedit a b, ita a f ad exceſſum, quo c a excedit a f. ex æquali igitur ut l b ad exceſſum linearum l a, a b, ita c f ad exceſſum linearum c a, a f.* H

Quare demonſtrandum eſt, ut g c ad c a, ita c f ad exceſſum linearum c a, a f.] *Hoc autem eſt, quod proxime demonſtrauit. ſed licet etiam in hunc modum concludere. ſit enim o a exceſſus, quo linea c a ipſam a f excedit; ut ſit c o æqualis a f. Quoniam igitur eſt ut tota g c ad totam c a, ita c f ablata ad ablatam a o; erit & reliqua g f ad reliquam o c, hoc eſt ad f a, ut g c ad c a. quod demonſtrare oportebat.* K

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XXXVI.

Iiſdem poſitis, ſi à puncto ducta linea, neque ſectionem in duobus punctis ſecet, neque æquidiſtans ſit aſymptoto, ſed cum oppoſita ſectione conueniat: erit ut tota ad lineam, quæ inter ſectionem, & æquidiſtantem per tactum ductam interiicitur, ita quæ eſt inter oppoſitam ſectionem, & aſymptoton ad eam, quæ inter aſymptoton & alteram ſectionẽ.

Sint oppoſitæ ſectiones a b, quarum centrum c; aſymptoti d e, f g: & in linea g e ſumatur punctum g; à quo ducatur g b e quidem ſectionem contingens; g h uero neque æquidiſtans ipſi c e, neque ſectionem in duobus punctis ſecans. iam conſtat h g

A productam conuenire cum linea c d. & propterea cum ſectione a, ut demonſtratum

B eſt. Conueniat igitur in puncto a: & per b ducatur k b l æquidiſtans c g. Dico ut a k ad k h, ita eſſe a g ad g h. ducantur enim à punctis a h lineæ h m, a n, quæ ipſi c g æquidiſtent: & à punctis b g h

C ducantur b x, g p, r h s n, quæ æquidiſtent d e. Ita-

D que quoniã a d æqualis eſt g h. erit ut a g ad g h,

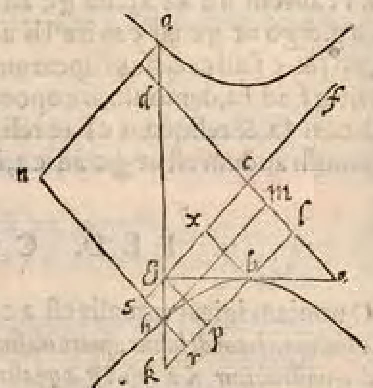
2. ſexti. ita d h ad h g. Vt autem a g ad g h, ita n s ad s h: & ut d h ad h g, ita c s ad s g. Vt igitur n s ad s h,

1. ſexti. ita c s ad s g. ſed ut n s ad s h, ita rectangulum n c ad rectangulum c h: & ut c s ad s g, ita rectangulum c r ad rectangulum r g. ergo ut rectangulum n c ad rectangulum c h, ita rectangulum c r

12. quinti ad ipſum r g. & ut unum ad unum, ita omnia ad omnia, quare ut n c ad c h, ita totum n l ad c h &

3 ſecũdi huius. 12 r g. & quoniam e b eſt æqualis b g, erit & l b ipſi b p æqualis: & rectangulum l x æquale rectangulo b g. ſed rectangulum l x rectangulo c h eſt æquale. ergo & b g ipſi

E c h. Vt igitur n c ad c h, ita totum l n ad b g, & g r; hoc eſt ad r x. ſed r x eſt æquale l h, quoniam & c h ipſi b h, & m b ipſi x h. ergo ut n c ad c h, ita n l ad l h. Vt autem n c ad c h, ita n s ad s h, hoc eſt a g ad g h. & ut n l ad l h, ita linea n r ad r h, hoc eſt a k ad k h. quare ut a k ad k h; ita a g ad g h.



75

EVTOCIVS.

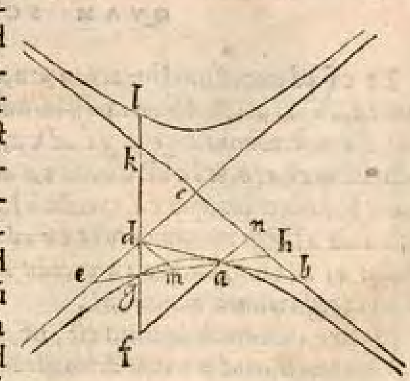
ALITER. Sint oppoſitæ ſectiones a l, quarum aſymptoti b k, d c, & contingens b a d. ducatur autem l k d g f: & ſit f a ipſi c d æquidiſtans. demonſtrandum eſt ut l f ad f g, ita l d ad d g. coniungatur enim a g, & ad e h protrahatur.

8. ſecũdi huius. 3 erit a h æqualis e g, & h g ipſi a e. ducatur per d linea d m æquidiſtans c h. ergo b a ipſi a d eſt

F æqualis: & h a ipſi a m. quare m g eſt exceſſus linearum h a, a g; hoc eſt a g, g e. & quoniam b k æquidiſtat d m, ut h g ad g m, ita erit k g ad g d. atque eſt a e æqualis h g, & l d ipſi k g. ergo ut l d ad d g, ſic a e ad g m, hoc eſt ad exceſſum linearũ

G a g, g e. ſed ut a e ad exceſſum linearum a g, g e, ita d f ad exceſſum linearum d g, g f. ergo ut l d ad d g, ita d f ad exceſſum linearum d g, g f. & ut unũ ad unum, ita omnia ad omnia. ut igitur l d ad d g

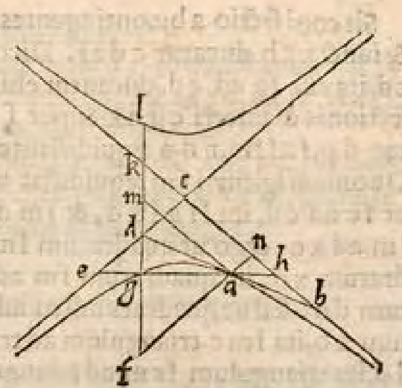
H ita tota l f ad d g, & exceſſum linearum d g, g f: hoc eſt ad g f.



76

ALITER.

ALITER Sint eadem, quæ supra, & per a ducatur a m ipsi b c æquidistans. Quoniam igitur b a est æqualis a d, erit & k m æqualis m d. & cum æquidistantes sint h k, a m, ut g m ad m k, ita erit g a ad a h, hoc est a g ad g e. Vt autem a g ad g e, ita f g ad g d: & ut g m ad m k, ita dupla ipsius g m ad duplam m k. ergo ut f h ad g d, ita dupla g m ad duplam m k. atque est l g dupla g m: est enim l k ipsi d g æqualis, & k m ipsi m d: & d k dupla k m. Vt igitur l g ad k d, ita f g ad g d: & permutando, ut l g ad g f, ita k d ad d g. quare componendo ut l f ad f g, ita k g ad g d, hoc est l d ad d g. 2. sexti 16. secundi huius.



FED. COMMANDINVS.

Iam constat h g productam conuenire cum linea c d.] *Quoniam enim linea g h non æquidistat c e, neque sectionem in duobus punctis secat, necesse est ut conueniat cum ipsa c d ad partes d: nam si conueniret ad partes c, sectioni prius occurreret; atque ita eam in duobus punctis secaret, quod non ponitur.* A

Et propterea cum sectione a ut demonstratum est.] *In undecima secundi huius.* B

Itaque quoniam a d æqualis est g h.] *Ex sexta decima secundi huius.* C

Erit ut a g ad g h, ita d h ad h g. ut autem a g ad g h, ita n s ad s h, & ut d h ad h g, ita e s ad s g.] *Hunc locum nos restituimus; in græco enim exemplari ita legebatur.* ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ ηγ, ἐστὶν ὡς αη πρὸς ηγ, ἡ νσ πρὸς ση, ὡς δὲ ἡ δη πρὸς ηε, ἡ γσ πρὸς σν. D

Sed r x est æquale l h, quoniam & c h ipsi b h.] *Vereor ne codex mendosus sit; non enim uideo, quorsum hæc faciant. At uero r x ipsi l h æquale esse manifesto constat. nam si à rectangulo c r auferantur æqualia, uidelicet rectangulum b c, & rectangulum c h; quæ remanent r x & l h æqualia erunt. Sed & aliter idem constare potest. est enim rectangulum b h utrique commune, & m b æquale x b, ex duodecima secundi huius. quare fortasse hoc modo legendum est. sed r x est æquale l h, quoniam & c h ipsi b c, & m b ipsi x b, ut utrumque demóstrationis modú insinuat.* E

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM, QVAE AB EVTOCIO AFFERTVR.

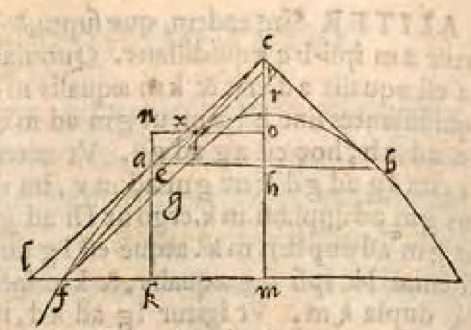
Et h a ipsi a m.] *Ob similitudinem triangulorum a b h, a d m.* F

Sed ut a e ad excessum linearum a g, g e, ita d f ad excessum linearum d g, g f.] *Hoc demonstrabimus, ut in antecedente.* G

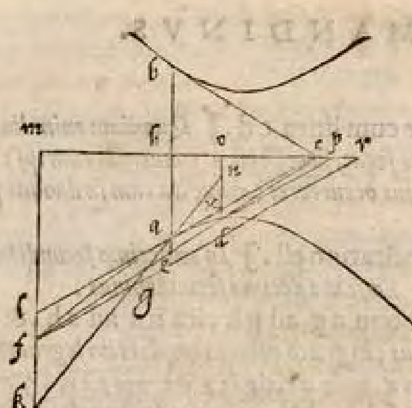
Hoc est ad g f.] *Linea enim d g unà cum excessu, quo exceditur à g f, est ipsi g f æqualis.* H

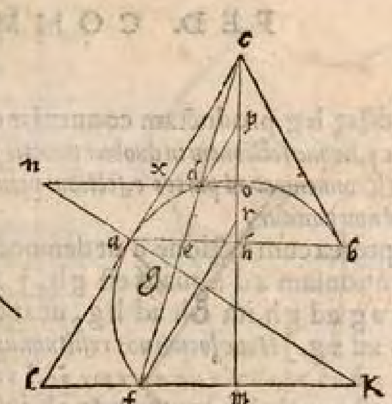
THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XXXVII.

SI coni sectionem, uel circuli circumferentiam, uel sectiones oppositas, contingentes duæ rectæ lineæ sibi ipsis occurrant; & per tactus linea producatur; ab occursu uero contingentium ducatur linea sectionem in duobus punctis secans: erit ut tota ad eam, quæ extra sumitur, ita portiones inter se se, quæ à linea tactus coniungente fiunt.



Sit coni sectio a b; contingentesq; a c, c b: & iuncta a b ducatur c d e f. Dico ut f c ad c d, ita esse f e ad e d. ducantur enim per c, a sectionis diametri c h, a k: & per f, d ducantur d p, f r, l f m, n d o æquidistantes a h, l c.
4.sexti Quoniam igitur l f m æquidistat x d o, erit ut f c ad c d, ita l f ad x d, & f m ad d o, & l m ad x o. ergo ut quadratum l m ad qua-
22.sexti dratum x o, ita quadratum f m ad quadra-
A tum d o. sed ut quadratum l m ad quadra-
B tum x o, ita l m c triangulum ad triangulum x c o: & ut quadratum f m ad quadratum d o, ita triangulum f r m ad triangulum d p o. quare ut triangulum l c m ad triangu-
19. quinti lum x o c, ita f r m triangulum ad triangulum d p o; & ita reliquum quadrilaterum
C l c r f ad reliquum x c p d. est autem l c r f quadrilaterum triangulo a l k æquale, &





quadrilaterum x c p d æquale triangulo a n x. Vt igitur quadratum l m ad quadra-
D tum x o, ita a l k triangulum ad triangulum a n x. sed ut quadratum l m ad quadratum x o, ita quadratum f c ad quadratum c d: & ut triangulum a l k ad triangulum
E a n x, ita quadratum l a ad quadratum a x; & quadratum f e ad quadratum e d. ergo,
22.sexti. ut quadratum f c ad quadratum c d, ita f e quadratum ad quadratum e d: & ideo ut linea f c ad c d, ita f e ad e d.

FED. COMMANDINVS.

A
20.sexti Sed ut quadratum l m ad quadratum x o, ita l c m triangulum ad triangulũ x c o.]
19 *Quadratum enim l m ad quadratum x o duplam proportionem habet eius; quæ est l m ad x o. sed & triangulum l c m ad triangulum x c o proportionem habet duplam eius, quæ est l m ad x o; similia namque sunt triangula l c m, x c o. ergo ut quadratum l m ad quadratum x o, ita triangulum l c m ad triangulum x c o.*

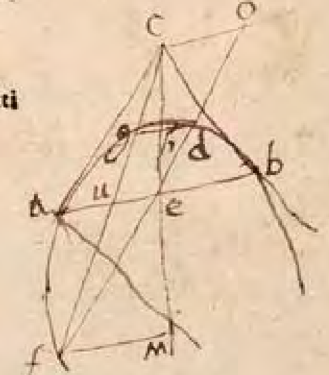
B Et ut quadratum f m ad quadratũ d o, ita triangulum f r m ad triangulum d p o.] *Ob similitudinem triangulorum f r m, d p o, ut dictum est.*

C Est autem l c r f quadrilaterum triangulo a l k æquale, & quadrilaterum x c p d æquale triangulo a n x.] *Nam in coni sectione, circuli circumferentia, & sectionibus oppositis diameter, quæ per occursum contingentium ducitur, uidelicet per punctum c bifariam secat lineam tactus coniungentem ex trigesima, & trigesima nona secundi huius; & propterea lineæ a h b, f m ad diametrum c h ordinatim applicatæ sunt. ergo ex iis, quæ demonstrantur in quadragesima nona, & quinquagesima primi huius quadrilaterum x c p d triangulo a n x est æquale. & quadrilaterum a c r g (secet enim linea a k ipsam f r in g) æquale triangulo f g k. quare utrique addito quadrilatero l a g f, erit totum quadrilaterum l c r f æquale triangulo l a k. In oppositis.*

uero

uero sectionibus illud idem sequitur ex demonstratis in undecima huius.

Sed ut quadratum lm ad quadratum xo, ita quadratum fc ad quadratum cd.] D
Nam ut lm ad xo, ita lc ad cx; & ut lc ad cx, ita fc ad cd. ergo ut lm ad xo, ita fc ad cd: 4. sexti
& propterea ut quadratum lm ad quadratum xo, ita quadratum fc ad ipsum cd. 2
Ita quadratum la ad quadratum ax, & quadratum fe ad quadratum ed.] *Est enim* 2 E
ut la ad ac, ita fe ad ec, ut autem ca ad ax, ita ce ad ed. ex æquali igitur ut la ad ax, ita fe 2. sexti
ad ed; & ut quadratum la ad quadratum ax, ita fe quadratum ad quadratum ed.

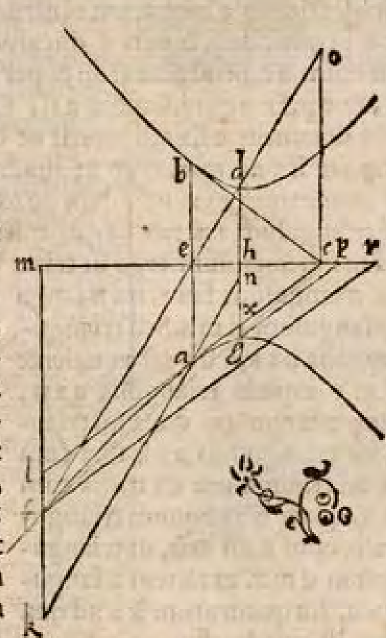


THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

IISDEM positis si per contingentium occursum ducatur recta linea, tactus coniungenti æquidistans; & per punctum, quod coniungentem tactus bifariam diuidit, ducatur linea secans, & sectionem ipsam in duobus punctis, & lineam æquidistantem per occursum ductam: erit ut tota ad eam, quæ extra sumitur inter sectionem, & lineam æquidistantem, ita portiones inter se se, quæ à linea tactus coniungente efficiuntur.

Sit sectio ab, quam contingant rectæ lineæ ac, cb sitq; ab coniungens tactus: & diametri an, cm. manifestum est lineam ab ad punctum e bifariam secari. Itaque ducatur à puncto c linea co ipsi ab æquidistans & per e ducatur fedo. Dico ut fo ad od, ita esse fe ad ed. Ducantur enim à punctis fd, lineæ lfkm, dhgxn, æquidistantes ab; & per fg ducantur fr, gp, quæ ipsi lc æquidistent. Eodem modo, quo supra, demonstrabimus ut quadratum lm ad quadratum xh, ita quadratum la ad quadratum ax. atque est ut quadratum lm ad quadratum xh, ita lc quadratum ad quadratum cx, & quadratum fo ad quadratum od. ut autem quadratum la ad quadratum ax, ita fe quadratum ad quadratum ed. ergo ut quadratum fo ad quadratum od, ita quadratum fe ad quadratum ed. & ut linea fo ad od, ita fe ad ed.

A



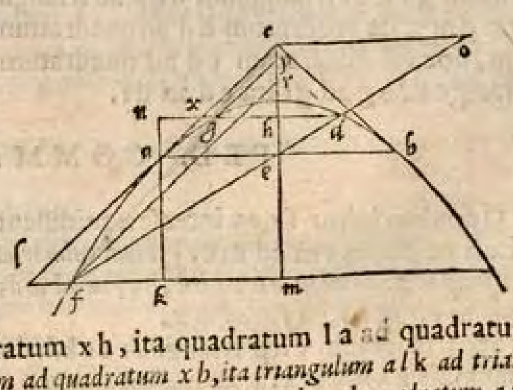
B

C

D

11. sexti

FED. COMMANDINVS.



Manifestum est lineam ab ad punctum e bifariam secari.] *Ex trigesima, & trigesima nona secundi huius, ut supra ad notauimus.* A

Eodem modo, quo supra, demonstrabimus, ut quadratum lm ad quadratum xh, ita quadratum la ad quadratum ax.] *Demonstrabimus enim, ut quadratum lm ad quadratum xb, ita triangulum alk ad triangulum anx. sed ut triangulum alK ad triangulum anx, ita quadratum la ad quadratum ax:* B *utrumque enim proportionem habet duplam eius, quæ est l a ad a x. ergo ut quadratum l m ad quadratum x h, ita quadratum l a ad quadratum a x.*

C Atque est ut quadratum l m ad quadratum x h, ita l c quadratum ad quadratum c x; & quadratum f o ad quadratum o d.] *Est enim ut l c ad c x, ita f o ad o d, propterea quòd lineæ c o, x d inter se se æquidistant.*

D Vt autem quadratum l a ad quadratum a x, ita quadratum f e ad quadratum e d.] *Rursus cum æquidistantes sint a e, x d, erit f e ad e d, ut l a ad a x.*

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XXXIX.

SI oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occurrant: & per tactus linea producatur: ab occursu uero contingentium ducta linea, & utramque sectionem, & lineam tactus coniungentem secet: erit ut tota ad eam, quæ extra sumitur, inter sectionem & coniungentem tactus, ita portiones inter se se, quæ inter sectiones & contingentium occursum interiiciuntur.

Sint oppositæ sectiones a, b; quarum centrum c: & lineæ contingentes a d, d b: iunctæ uero a b, c d producantur; & per d ducatur e d f g. Dico ut e g ad g f, ita esse e d ad d f. iungatur enim a c, producaturque; & per e f ducantur e h s k, f n l m x o ipsi a b

A æquidistantes, & e p, f r æquidistantes a d. Quoniam igitur f x, e s inter se æquidistant, & ad ipsas ducuntur e f, x s, h m; erit ut e h ad h s, ita f m ad m x: & permutando ut e h ad f m, ita h s ad m x. ergo ut quadratum e h ad quadratum f m, ita quadratum h s, ad quadratum m x. ut autem quadratum e h ad quadratum f m, ita e h p triangulum ad triangulum f m r: & ut quadratum h s ad quadratum m x, ita triangulum d h s ad d m x triangulum. ergo ut triangulum e h p ad triangulum f m r, ita triangulum d h s ad triangulum d m x. Sed triangulum e h p triangulis a s k, h d s est æquale: & triangulum f m r æquale triangulis a x n, d m x. Vt igitur triangulum d h s ad triangulum d m x, ita triangulum a s k unà cum triangulo d h s ad triangulum a x n unà cum triangulo d m x. quare & reliquum triangulum a s k ad reliquum a x n erit, ut triangulum d h s ad ipsum d m x. ut autem triangulum a s k ad a x n, ita quadratum k a ad quadratum a n; hoc est quadratum e g ad quadratum g f. & ut triangulum d h s ad triangulum d m x, ita quadratum h d ad quadratum d m, hoc est quadratum e d ad quadratum d f. ergo ut e g ad g f ita e d ad d f.

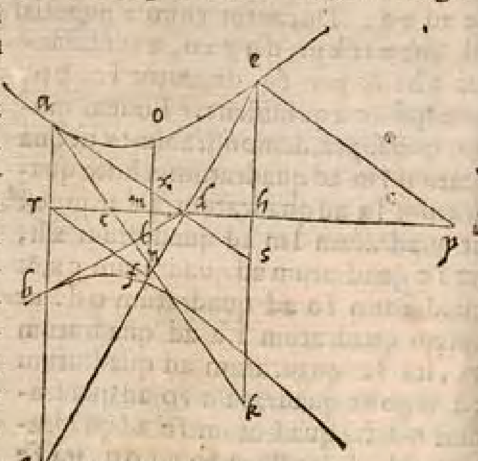
22. sexti

B

19. quinti.

C

D



FED. COMMANDINVS.

A Quoniam igitur f x, e s inter se æquidistant; & ad ipsas ducuntur e f, x s, h m: erit ut e h ad h s, ita f m ad m x.] *Fiunt enim triangula similia e d h, f d m; itemque similia inter se d h s, d m x. quare ut e h ad h d, ita f m ad m d; & ut d h ad h s, ita d m ad m x. ex æquali igitur ut e h ad h s, ita f m ad m x.*

B Sed triangulum e h p triangulis a s k, h d s est æquale: & triangulum f m r æquale triangulis a x n, d m x.] *Ex undecima huius.*

C Hoc est quadratum e g ad quadratum g f.] *Ob similitudinem triangulorum k n e, a n g.*

Ergo

Ergo ut e g ad g f, ita e d ad d f.] *Ex ijs, quæ dicta sunt, sequitur, ut quadratum e g ad quadratum g f, ita esse quadratum e d ad d f quadratum. ergo ex 22. sexti ut linea e g ad g f, ita est e d ad d f.* D

THEOREMA XL. PROPOSITIO XL.

Iisdem positis si per occursum contingentium ducatur recta linea, tactus coniungenti æquidistans; & à puncto, quod coniungentem tactus bifariam diuidit, ducatur linea secans utranque sectionem, & æquidistãtem ei, quæ tactus coniungit: erit ut tota ad eam, quæ extra sumitur inter æquidistantem & sectionẽ, ita portiones inter se se, quæ inter sectiones, & coniungentem tactus interiiciuntur.

Sint oppositæ sectiones a b, quarum centrum c: & contingentes lineæ a d, d b: iungaturq; a b, & c d e. erit a e ipsi e b æqualis. ducatur per d linea f d g æquidistãs a b: & per e quomodocunque contingat h e k l. Dico ut h l ad l k, ita esse h e ad e k. ducantur enim à punctis h k lineæ h n m x, k o p ipsi a b æquidistantes; & h r, k s æquidistantes a d: & ducatur a c x t. Itaque quoniam in lineas æquidistantes x m, k p cadunt x a y, m a p; erit ut x a ad a y, ita m a ad a p. Vt autem x a ad a y, ita h e ad e k: & ut h e ad e k, ita h n ad k o, propter similitudinem triangulorum h e n, k e o. quare ut h n ad k o, ita m a ad a p: & idcirco ut quadratum h n ad quadratum k o, ita m a quadratum ad quadratum a p. sed ut quadratum h n ad quadratum k o, ita triangulũ h r n ad triangulum k s o: & ut quadratum m a ad quadratum a p, ita x m a triangulum ad triangulum a y p. ut igitur triangulũ h r n ad triangulum k s o, ita triangulum x m a ad triangulum a y p. triangulum autem h r n triangulis x a m, m n d est æquale: & triangulũ k s o æquale triangulis a y p, p o d. ergo ut triangulum x a m unà cum triãgulo m n d ad triangulum a y p unà cum triangulo p o d, ita x m a triangulum ad triangulum a y p. quare & reliquum triangulum m n d ad reliquum d o p est, ut totum ad totum. sed ut triangulum x m a ad triangulum a y p, ita quadratum x a ad a y quadratum. & ut triangulum m n d ad triangulum d o p, ita m n quadratum ad quadratũ p o. ergo ut quadratum m n ad quadratum p o, ita quadratum x a ad quadratum a y. Vt autem quadratum m n ad quadratum p o, ita n d quadratum ad quadratum d o: & ut quadratum x a ad quadratum a y, ita quadratum h e ad quadratum e k. sed ut quadratum n d ad quadratum d o, ita quadratum h l ad quadratum l k. ut igitur quadratum h e ad quadratũ e k, ita h l quadratum ad quadratũ l k. & propterea ut linea h e ad e k, ita h l ad l k.

A 39 h
B C
D
E
F
G

FED. COMMANDINVS.

A Erit a e ipsi e b æqualis.] *Ex 39. secundi huius.*

B Erit ut x a ad a y, ita m a ad a p.] *Ob similitudinem triangulorum a m x, a p y.*

C Vt autem x a ad a y, ita h e ad e k.] *Producantur e a, o p usque ad lineam h r in puncta i q: erit h i ipsi m a æqualis, & h q æqualis m p. ergo ut x a ad a y, ita m a ad a p, hoc est h i ad i q: & ut h i ad i q, ita h e ad e k. ut igitur x a ad a y, ita h e ad e k.* 34 primi 2. sexti.

D Sed ut quadratum h n ad quadratum k o, ita triangulum h r n ad triangulũ k s o] *Sunt enim triangula h r n, k s o inter se similia.*

E Triangulum autem h r n triãgulis x a m, m n d est æquale: & triangulum k s o æquale triangulis a y p, p o d.] *Ex undecima huius.*

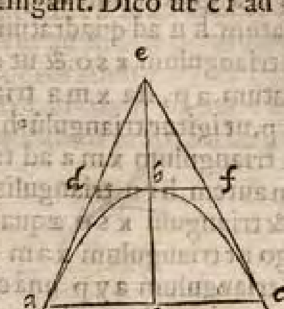
F Et ut quadratum x a ad quadratũ a y, ita quadratum h e ad quadratum e k.] *Superius enim ostensum est, ut x a ad a y, ita h e ad e k.*

G Sed ut quadratum n d ad quadratum d o, ita quadratum h l ad quadratum l k.] *Secet enim d f lineam h r in u. erit ut n d ad d o, ita m d ad d p, hoc est h u ad u q. sed ut h u ad u q, ita h l ad l K. quare ut n d ad d o, ita h l ad l K. & ut quadratum n d ad quadratum d o, ita quadratum h l ad quadratum l k.*

THEOREMA XLI. PROPOSITIO XLI.

Si parabolen contingentes tres rectæ lineæ inter se conueniant, in eandem proportionem secabuntur.

Sit parabole a b c, quam rectæ lineæ a d e, e f c, d b f contingant. Dico ut c f ad f e, ita esse e d ad d a, & f b ad b d. coniungatur enim a c: &



A bifariam in g diuidatur. perspicuum est lineam, quæ ab e
B ducitur ad g sectionis diametrum esse. si igitur per b tran
C sit, erit linea d f æquidistans a c, & ab e g bifariam in pun
D cto b secabitur: proptereaq; a d ipsi d e, & e f ipsi f c æqualis erit. constat igitur uerum esse illud, quod proponebatur. Sed non transeat e g per b, sed per aliud punctum,
E quod sit h. & per h ducatur k h l æquidistans a c, quæ in h sectionem continget. erit per ea, quæ dicta sunt, a k ipsi k e æqualis, & e l ipsi l c. Itaque per punctum quidem b ducatur m n b x æquidistans e g: per a c uero ducantur a o, c p æquidistantes d f. Quoniam igitur m b ipsi e h
F æquidistat, erit m b diameter: & d f in b sectionem continget. quare a o, c p ordinatim applicabũtur. & quoniam
35. primi huius. m b diameter est; & c m sectionẽ contingit; ordinatimq; applicatur c p: erit m b ipsi b p æqualis. ergo m f ipsi f c.
2. sexti. Quòd cum m f sit æqualis f c; & e l ipsi l c; ut m c ad c f, ita est e c ad c l: & permutãdo ut m c ad c e, ita f c ad c l.
4. sexti. Vt autem m c ad c e, ita x c ad c g. ergo ut f c ad c l, ita x c ad c g. sed ut g c ad c a, ita l c ad c e, quòd utraque
G utriusque dupla sit. ex æquali igitur, ut e c ad c f, ita a c ad c x: & per conuersionem rationis, ut c e ad e f, ita c a ad a x: diuidendoq; ut c f ad f e, ita c x ad x a. Rursus quoniã diameter est m b, contingitq; a n: & ordinatim applicatur
35. primi huius. a o, erit n b ipsi b o, & n d ipsi d a æqualis. est autem & e k æqualis k a. ergo ut e a ad a k, ita n a ad a d. & permutan-
4. sexti do ut e a ad a n, ita k a ad a d. sed ut e a ad a n, ita g a ad a x. quare ut k a ad a d, ita g a ad a x. atque est ut e a ad a g, ita e a ad a k: utraque enim utriusque est dupla. ex æquali igitur ut e a ad a x, ita e a ad a d: & diuidendo ut e x ad x a, ita e d ad d a. demonstratum est autem, ut c x
H ad x a, ita c f ad f e. ergo ut c f ad f e, ita e d ad d a. Rursus quoniam ut c x ad x a, ita

c p

cp ad ao.& est linea quidem cp dupla bf, quòd cm ipsius mf sit dupla; linea uero ao dupla db, quòd & an ipsius nd. Vt igitur cx ad xa, ita fb ad bd, & cf ad fe, & cd ad da.

FED. COMMANDINVS.

Perspicuum est lineam, quæ ab e ducitur ad g sectionis diametrum esse.] *Ex 29. secundi huius.* A

Si igitur per b transit, erit linea df æquidistans ac.] *Ex 5. secundi huius.* B

Et ab eg bifariam in puncto b secabitur.] *Est enim db ad bf, ut ag ad gc, quod demonstrauimus in commentarijs in sextam primi huius.* C

Proptereaq; ad ipsi de, & cf ipsi fe æqualis erit.] *Sequitur ex iam dictis, & ex 35. primi huius, lineam gb ipsi be æqualem esse. quare ex secunda sexti, & ad ipsi de, & cf ipsi fe est æqualis.* D

Quæ in h sectionem continget.] *Ex 32. primi huius, quod & aliter cõstare potest. si enim kbl non contingit sectionem, ducatur per b linea contingens, quæ æquidistabit ipsi agc, ex quinta secundi huius. sed cum kbl eidem æquidistet, erunt ambæ inter se æquidistantes, quod est absurdum: siquidem in puncto b conueniunt.* E

Erit mb diameter.] *Ex demonstratis in 46. primi huius.* F

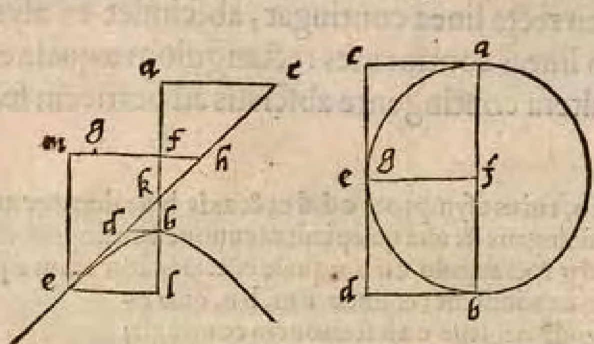
Ex æquali igitur ut ec ad cf, ita ac ad cx.] *Sequitur hoc ex æquali, & conuertendo.* G

Rursus quoniam ut cx ad xa, ita cp ad ao] *Ob similitudinẽ triangulorum cpx, xao.* H

THEOREMA XLII. PROPOSITIO XLII.

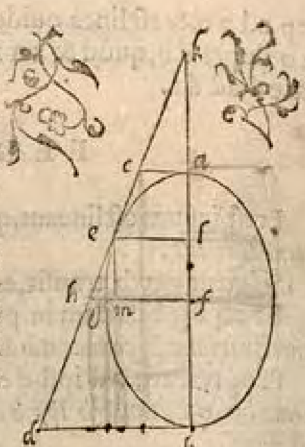
Si in hyperbola, uel ellipsi, uel circuli circumferentia, uel oppositis sectionibus ab extremo diametri ducantur lineæ æquidistantes ei, quæ ordinatim applicata est: & alia quæpiam linea quomodocunque contingens ducantur: abscindet ex ipsis lineas continentes rectangulum æquale quartæ parti figuræ, quæ ad eandem diametrum constituitur.

Sit aliqua prædictarum sectionum, cuius diameter ab: atque à punctis ab ducantur lineæ ac, bd æquidistantes ei, quæ ordinatim applicata est: & alia quæpiam linea ced in puncto e sectionem contingat. Dico rectangulum lineis ac, bd contentum



æquale esse quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum ab constituitur. sit enim sectionis centrum f: & per f ducatur fgh ipsis ac, bd æquidistãs. Itaque quoniam ac, bd æquidistantes sunt, & est æquidistans fg: erit fg diameter ipsi ab coniugata. ergo quadratum fg æquale est quartæ parti figuræ, quæ fit ad ab. si igitur in ellipsi & circulo linea fg per e transit, æquales sunt ac, fg, bd: & ideo per se manifestum est, rectangulum, quod continetur ac, bd æquale esse quadrato fg, hoc est quartæ parti figuræ, quæ ad ab constituitur. sed non transeat per e: & dc, ba productæ conueniant

in κ: ducaturq́; per c linea quidem e l ipsi a c æquidistãs:
A e m uero æquidistans a b. Quoniam igitur rectangulum
B κ f l quadrato a f est æquale; ut κ f ad f a, ita erit a f ad
C f l. est autem ut κ f ad f a, hoc est ad f b, ita k a ad a l: & conuertendo ut b f ad f k, ita l a ad a κ: componendoq; uel
D diuidendo, ut b k ad k f, ita l κ ad κ a. sed ut b κ ad k f, ita d b ad f h: & ut l κ ad k a, ita e l ad c a. ergo ut d b
E ad f h, ita e l ad c a: & propterea rectangulum cõtentum d b, c a æquale est ei, quod f h, e l continetur, hoc est rectã-
F gulo h f m: rectangulum autem h f m est æquale quadrato f g; hoc est quartæ parti figuræ, quæ ad a b. rectangulum igitur ex d b, c a æquale est quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum a b constituitur.



FED. COMMANDINVS.

A Quoniam igitur rectangulum k f l quadrato a f est æquale.] *Ex trigesima septima primi huius.*

B Vt κ f ad f a, ita erit a f ad f l.] *Ex 15. sexti.*

C Est autem ut k f ad f a, hoc est ad f b, ita k a ad a l.] *In hyperbola hoc sequitur ex 12. quinti. Quoniam enim ut* k f *ad* f a, *ita* a f *ad* f l, *erit ut* k f *ad* f a, *ita* k f, *&* f a *ad* a f, *&* f l, *hoc est* k a *ad* a l. *sed in ellipsi & circulo ita dicemus. Quoniam ut* κ f *ad* f a, *ita* a f *ad* f l, *per conuersionem rationes erit ut* f k *ad* k a, *ita* f a *ad* a l: *& permutando ut* κ f *ad* f a, *ita* k a *ad* a l.

D Sed ut b k ad κ f, ita d b ad f h: & ut l k ad k a, ita e l ad c a.] *Hæc nos addidimus perspicuitatis caussa, quæ tamen desiderari uidebantur.*

E Et propterea rectangulum contentum d b, c a æquale est ei, quod f h, e l continetur.] *Ex 16. sexti.*

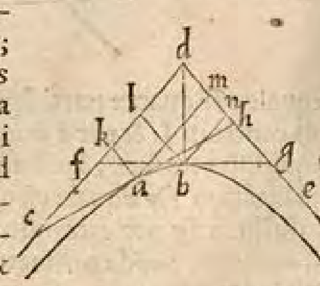
F Rectangulum autem h f m æquale est quadrato f g.] *Ex 38. primi huius.*

THEOREMA XLIII. PROPOSITIO XLIII.

Si hyperbolen recta linea contingat, abscindet ex asymptotis ad sectionis centrum lineas continentes rectangulum æquale ei, quod continetur lineis ab altera contingente abscissis ad uerticem sectionis, qui est ad axem.

Sit hyperbole a b, cuius asymptoti c d, d e; & axis b d: ducatur autem per b linea f b g sectionem contingens: & alia quæpiam utcunque contingens ducatur c a h. Dico rectangulum f d g rectangulo c d h æquale esse. Ducãtur enim à punctis a b lineæ a κ, b l, quæ ipsi d g æquidistent; & lineæ a m, b n, quæ æquidistent c d. Quoniam igitur c a h sectionem contingit; erit c a æqualis a h. quare c h dupla est h a; & c d ipsius a m; & d h ipsius a κ dupla. ergo rectangulum c d h quadruplum est rectanguli k a m. Eodem modo demonstrabitur rectangulum f d g rectanguli l b n quadruplum. Sed rectangulum k a m est æquale rectangulo l b n. rectangulum igitur c d h rectangulo f d g æquale erit. similiter demonstrabitur etiam si d b sit alia quæpiam diameter, & non axis.

3. secũdi huius.
4. sexti.
20
12. secũdi huius.

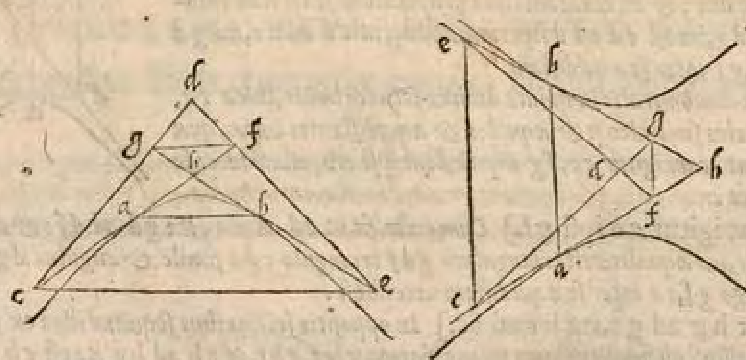


THEO

THEOREMA XLIIII. PROPOSITIO XLIIII.

Si hyperbolen, uel oppositas sectiones contingentes duæ rectæ lineæ asymptotis occurrant; quæ ad occursus ducuntur, lineæ tactus coniungenti æquidistantes erunt.

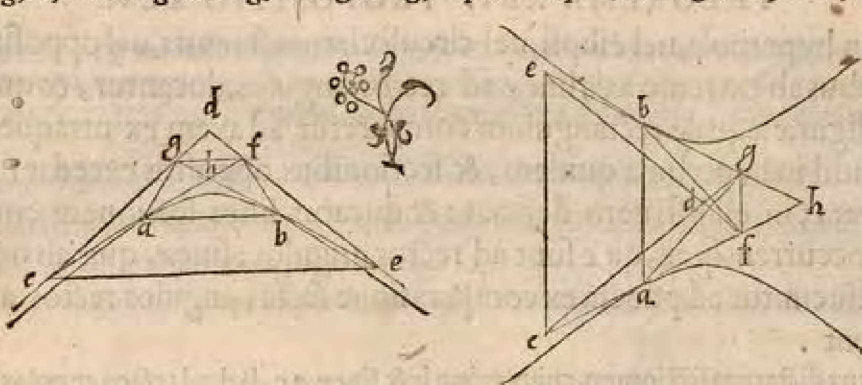
Sit hyperbole, uel oppositæ sectiones a b: asymptoti uero c d, d e; & contingentes c a h f, e b h g. iunganturq; a b, f g, c e. Dico eas inter se æquidistantes esse. Quoniam A
enim rectangulum c d f æquale est rectangulo g d e; ut c d ad d e, ita erit g d ad d f. 15. sexti.



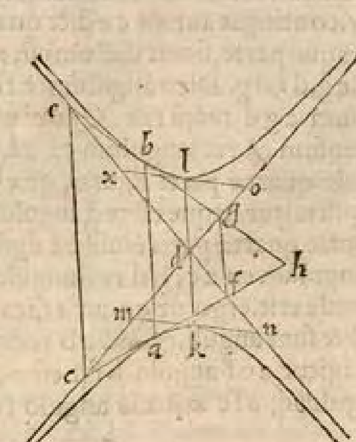
æquidistat igitur c e ipsi g f: & ideo ut h g ad g e, ita h f ad f c. Vt autem e g ad g b, B C
ita c f ad f a: utraque enim utriusque est dupla. ergo ex æquali ut h g ad g b, ita h f ad
f a. linea igitur g f ipsi a b est æquidistans. D

EVTOCIVS.

Demonstratis lineis c e, g f inter se æquidistantibus, coniungantur g a, f b. & quoniam æquidistant f g, c e; erit triangulum c g f triangulo e g f æquale. atque est triangulum quidem c g f du- 1. sexti.

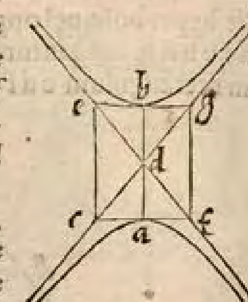


plum trianguli a g f; quod linea c f ipsius f a sit dupla: triangulum uero e g f duplum trianguli b g f. ergo triangulum a g f triangulo b g f est æquale: & propterea linea f g ipsi a b æquidistat. 39. primi. *In oppositis uero sectionibus, si linea a b per centrum d non transeat, ducatur per d ipsi e c æquidistans K d l: & per K l ducantur m k n, x l o, quæ sectiones contingant. Quoniam igitur rectangulum x d o æquale est rectangulo m d n: rectangulum autem* 43. huius *x d o rectangulo e d g est æquale: & rectangulum m d n æquale rectangulo c d f: sequitur rectangulum e d g rectangulo c d f æquale esse.*



FED. COMMANDINVS.

A Quoniam enim rectangulum c d f æquale est rectãgulo g d e, ut c d ad d e, ita erit g d ad d f.] *Hoc in hyperbola ita esse ex antecedente constat: sed in oppositis sectionibus, cum linea a b per centrum d non transit, ab Eutocio in fine commentarij demonstratur. Quòd si a b transeat per d, illud facile constare potest. descripta etenim figura lineæ c f, e g æquidistantes sunt. quare triangula a d f, b d e similia: & cum a d sit æqualis d b, etiam inter se æqualia erunt. Eadem quoque ratione æqualia ostendentur triangula c d a, g d b. ergo totum triangulum c d f toti g d e est æquale: & ex quintadecima propositione sexti elementorum, ut c d ad d g, ita est e d ad d f: permutandoq; ut c d ad d e, ita g d ad d f. ergo c e, g f inter se æquidistant.*



Præterea ex demonstratis in quinta decima secundi huius, lineæ c a, a f, e b, b g æquales sunt: ideoq; & æquales & æquidistantes lineæ, quæ ipsas coniungunt. cum igitur c e, f g æquidistent ipsi a b, etiam inter se se æquidistabunt.

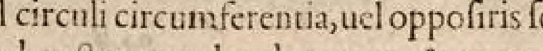
B Aequidistat igitur c e ipsi g f.] *Cum enim sit ut c d ad d e, ita g d ad d f: & angulus ad*
6. sexti *d, uel communis, uel æqualis: erit triangulum g d f triangulo c d e simile: & angulus d g f æqualis*
27. primi *angulo d c e. ergo g f, c e inter se æquidistent necesse est.*
28 C Et ideo ut h g ad g e, ita h f ad f c.] *In oppositis sectionibus sequitur illud ex secunda sexti. At uero in ellipsi ob similitudinem triangulorum c h e, g h f, ut e h ad h g, ita est c h ad h f: & componendo, conuertendoq; ut h g ad g e, ita h f ad f c. Hic autem incipit demonstrare lineam g f ipsi a b æquidistantem esse, quod quidem ab Eutocio etiam aliter demonstratur.*

D Linea igitur g f ipsi a b est æquidistans.] *Ex secunda sexti in oppositis sectionibus. sed in hyperbola cum sit ut h g ad g b, ita h f ad f a, & conuertendo, diuidendoq; erit ut b h ad h g, ita a h ad h f: & permutando ut b h ad h a, ita g h ad h f. sunt autem anguli ad h inter se æquales.*
6. sexti *triangulum igitur a h b simile est triangulo g h f, & angulus a b g æqualis angulo h g f. quare g f ipsi a b æquidistat.*

THEOREMA XLV. PROPOSITIO XLV.

Si in hyperbola, uel ellipsi, uel circuli circumferentia, uel oppositis sectionibus ab extremo axis lineæ ad rectos angulos ducantur, & quartæ parti figuræ æquale rectangulum comparetur ad axem ex utraque parte; quod in hyperbola quidem, & sectionibus oppositis excedat figura quadrata; in ellipsi uero deficiat: & ducatur linea sectionem contingens, occurrensq; eis, quæ sunt ad rectos angulos: lineæ, quæ ab occursibus ducuntur ad puncta ex comparatione facta, angulos rectos ad ea efficient.

Sit una dictarum sectionum, cuius axis a b: & lineæ a c, b d ad rectos angulos ducã tur. contingat autem c e d: & quartæ parti figuræ æquale rectangulum comparetur ex utraque parte, sicuti dictum est; uidelicet rectangulum a f b, & a g b: & coniungantur c f, c g, d f, d g. Dico angulum c f d, & an-
42. huius gulum c g d rectũ esse. Quoniam enim ostensum est rectangulum ex a c, b d æquale quartæ parti figuræ, quæ ad a b constituitur: atque est rectangulum a f b æquale quartæ parti eiusdem figuræ: rectangulum ex a c, b d rectangulo a f b
15. sexti æquale erit. ergo ut c a ad a f, ita f b ad
6. sexti. b d: & sunt anguli, qui ad a b recti. angulus igitur a c f angulo b f d est æqualis: angulusq; a f c æqualis angulo f d b. &



quoniam

Hinc quicunque circulus circa diametrum tangentis contentis .dc a tangentibus ac. bd. terminos axis a, b transversi ductis, in peripheria transit necessario per focos f, g.

quoniam angulus e a f est rectus, anguli a c f, a f c uni recto æquales erunt. demonstratum autem est angulum a c f æqualem esse angulo d f b. ergo c f a, d f b anguli uni recto sunt æquales. reliquus igitur angulus d f c rectus est. similiter & angulus c g d rectus demonstrabitur. 32. primi

FED. COMMANDINVS.

Reliquus igitur angulus d f c rectus est.] *In ellipsi scilicet, nam in hyperbola angulus d f c ex duobus angulis c f a, d f b constat.*

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO XLVI.

Iisdem positis lineæ coniunctæ æquales facient angulos ad contingentes.

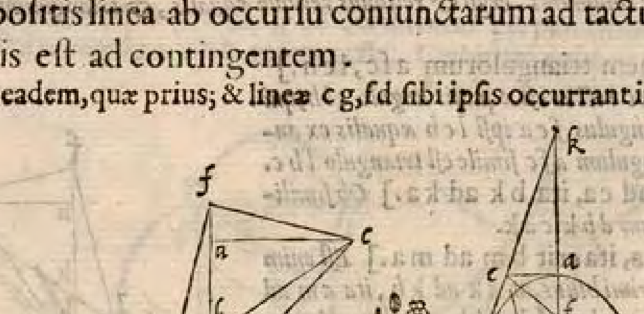
Iisdem nanque positis, dico angulum a c f angulo d c g; & angulum c d f angulo b d g æqualem esse. Quoniam enim ostendimus utrunque angulorum c f d, c g d rectum esse: si circa diametrum c d circulus describatur per puncta f g transibit. qua- in antecedente. 31. tertii. 21. tertii.

re angulus d c g æqualis est angulo d f g, quòd sint in eadem circuli portione. angulus autem d f g angulo a c f est æqualis, ut demonstratum fuit. ergo & d c g angulus æqualis erit angulo a c f. Eodem modo & angulus c d f angulo b d g æqualis ostendetur. in antecedente.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO XLVII.

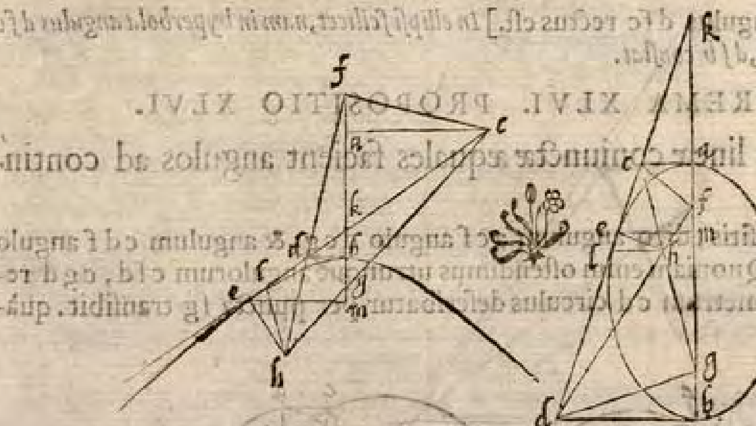
Iisdem positis linea ab occursu coniunctarum ad tactum ducta, perpendicularis est ad contingentem.

Ponantur eadem, quæ prius; & lineæ c g, f d sibi ipsis occurrant in h: & c d, b a pro



ductæ occurrant in k: coniungaturq; e h. Dico e h ad c d perpendicularem esse. si enim non est ita, ducatur à puncto h ad c d perpendicularis h l. Quoniam igitur an- A

gulus c d f æqualis eſt angulo g d b,& angulus d b g rectus æqualis recto d l h: triangulum d g b triangulo l h d ſimile erit. quare ut g d ad d h,ita b d ad d l. Sed ut g d
4. ſexti
B ad d h,ita f c ad c h,propterea quòd anguli ad f g recti, & qui ad h æquales ſunt. &
C ut f c ad c h,ita a c ad c l,ob ſimilitudinem triangulorum a f c,l c h. Vt igitur b d ad
D d l,ita a c ad c l:& permutando ut d b ad c a, ita d l ad l c. ut autem d b ad c a, ita



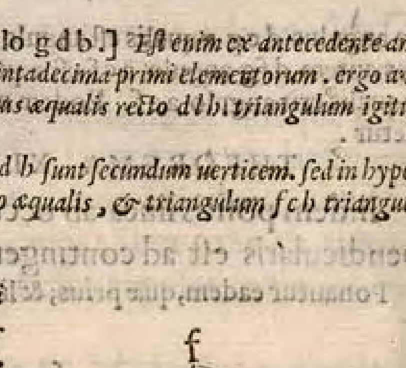
b k ad k a. ergo ut d l ad l c,ita b k ad k a. Itaque à puncto e ducatur linea e m ipſi
E a c æquidiſtans,quæ ad a b ordinatim applicata erit;& ut b k ad k a, ita erit b m ad
F G m a. ſed ut b m ad m a, ita d e ad e c. quare ut d l ad l c,ita erit d e ad e c: quod eſt abſurdum. non igitur h l perpendicularis eſt ad l c,neque alia ulla, præter ipſam h e.

FED. COMMANDINVS.

A Quoniam igitur angulus c d f æqualis eſt angulo g d b.] *Eſt enim ex antecedente angulus c d f æqualis angulo g d h: itemq; angulo l d ex quintadecima primi elementorum. ergo angulus g d b ipſi l d b eſt æqualis. eſt autem & d b g rectus æqualis recto d l h: triangulum igitur d g b triangulo d h l ſimile erit.*

B Et qui ad h æquales ſunt.] *In ellipſi enim anguli ad h ſunt ſecundum uerticem. ſed in hyperbola idem eſt utrique communis. ergo & reliquus reliquo æqualis, & triangulum f c h triangulo g d h ſimile erit.*

C Ob ſimilitudinem triangulorum a f c, l c h.] *Nanque angulus f a c rectus eſt æqualis angulo g l h, qui rectus ponitur; & angulus f c a ipſi l c h æqualis ex antecedente. ergo triangulum a f c ſimile eſt triangulo l h c.*



D Vt autem d b ad c a, ita b k ad k a.] *Ob ſimilitudinem triangulorum d b k, c a k.*

E Et ut b k ad k a, ita erit b m ad m a.] *Eſt enim ex trigeſima ſexta primi huius, ut a k ad k b, ita a m ad m b. quare & conuertendo ut b k ad k a, ita b m ad m a.*

F Sed ut b m ad m a, ita d e ad e c.] *Hoc in ellipſi perſpicuum eſt, ſed in hyperbola iungatur m c, & d b ad ipſam producatur in n. erit ut b m ad m a, ita n m ad m c. ut autem n m ad m c, ita d e ad e c. ergo ut b m ad m a, ita d e ad e c.*
2. ſexti.
4. ſexti.

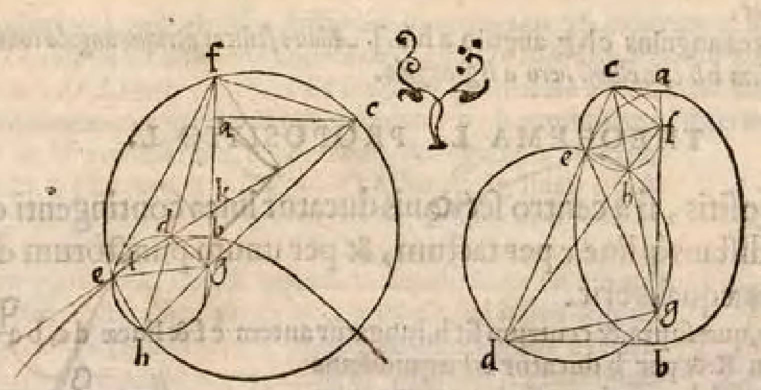
G Quare ut d l ad l c,ita d e ad e c, quod eſt abſurdum.] *Si enim fieri poteſt, ſit ut d l ad l c, ita d e ad e c. erit conuertendo ut c l ad l d, ita c e ad e d: & diuidendo ut c d ad d l, ita c d ad d e. ergo ex nona quinti d l eſt æqualis d e, pars toti, quod eſt abſurdum.*

THEO

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO XLVIII.

Iisdem positis, ostendendum est lineas, quæ à tactu ducuntur, ad puncta ex comparatione facta, æquales continere angulos ad contingentem.

Ponantur eadem, quæ prius: & coniungantur e f, e g. Dico angulum c e f angulo g e d æqualem esse. Quoniam enim anguli d g h, d e h recti sunt: circulus circa diametrum d h descriptus per puncta e g transibit. quare angulus d h g æqualis erit angu



lo d e g in eadem enim portione consistunt. Similiter & c e f angulus angulo c h f est æqualis, & angulus c h f angulo d h g; quod sint secundum uerticem. angulus igitur c e f angulo g e d æqualis erit. A

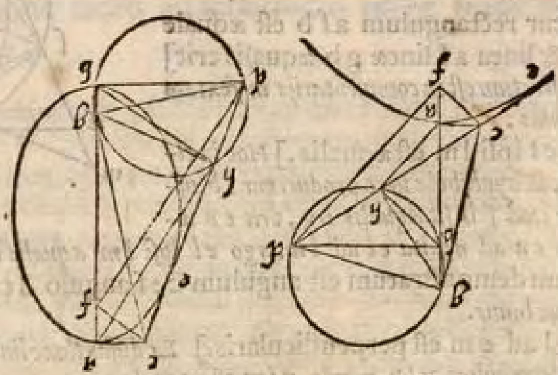
FED. COMMANDINVS.

Quod sint secundum uerticem.] *Intelligendum est hoc in ellipsi, nam in hyperbola est idem angulus.* A

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO XLIX.

Iisdem positis si ab aliquo punctorum ad contingentem perpendicularis agatur, quæ à facto puncto ducuntur ad axis extrema, rectos angulos continebunt.

Ponantur eadem; & à puncto g ad c d ducatur perpendicularis g h; & a h, b h iungantur. Dico angulum a h b rectum esse. Quoniam enim angulus d b g, & d h g



est rectus, si circa diametrum d g circulus describatur, transibit per puncta h b, & angulus g h b angulo b d g æqualis erit. angulus autem a g c ostensus est æqualis angu A

b

B lo b d g. ergo g h b angulus æqualis est angulo a g c, hoc est angulo a h c: & propterea angulus c h g angulo a h b. sed rectus est angulus c h g. ergo & a h b rectus erit.

FED. COMMANDINVS.

A Angulus autem a g c ostensus est æqualis angulo b d g.] *In 45. huius.*

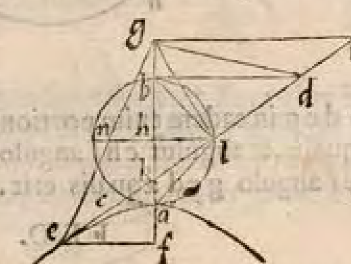
B Hoc est angulo a h c.] *Sunt enim anguli c a g, c h g recti. quare si circa diametrum c g circulus describatur, per puncta a h transibit; & anguli a g c, a h c in eadem circuli portione inter se æquales erunt.*

C Et propterea angulus c h g angulo a h b.] *Addito scilicet utrique angulo communi; in hyperbola quidem b h c, in ellipsi uero a h g angulo.*

THEOREMA L. PROPOSITIO L.

Iisdem positis, si à centro sectionis ducatur linea contingenti occurrens; æquidistansq; lineæ per tactum, & per unum punctorum ductæ; dimidio axis æqualis erit.

Sint eadem, quæ supra, & centrum sit h. iungatur autem e f: & lineæ d c, b a inter se conueniant in K: & per h ducatur h l æquidistans e f. Dico l h ipsi h b æqualem esse. Iungantur enim e g, a l, l g, l b: & per g ducatur g m ipsi e f æquidi-



A stans. Quoniam igitur rectangulum a f b est æquale rectangulo a g b, & linea a f lineæ g b æqualis erit. est autem & a h æqualis h b. ergo & f h ipsi

B C h g: & propterea e l ipsi l m est æqualis. Itaque quoniam demonstratum est angulum c e f angu-

29. primi. lo d e g æqualem esse: estq; angulus c e f æqualis angulo e m g: erit & e m g angulus ipsi m e g æqualis: & linea e g lineæ g m. sed & e l est æqualis

D l m, ut demonstrauimus. linea igitur g l ad e m est

E perpendicularis. est autem & angulus a l b rectus. quare si circa diametrum a b circulus describatur, per punctum l transibit. atque est a h æqualis h b. ergo & h l, quæ est ex centro circuli, ipsi h b æqualis erit.

FED. COMMANDINVS.

A Quoniam igitur rectangulum a f b est æquale rectãgulo a g b: & linea a f lineæ g b æqualis erit] *Hoc à nobis demonstratum est in commentarijs in sextam decimam secundi huius.*

B Et propterea e l ipsi l m est æqualis.] *Hoc in ellipsi manifestum est, in hyperbola uero producatur l h usque ad e g in n: & cum f h sit æqualis h g, erit e n æ-*

2. sexti. *qualis n g. ut autem e n ad n g, ita e l ad l m. ergo e l ipsi l m æqualis erit.*

C Itaque quoniam demonstratum est angulum c e f angulo d e g æqualem esse.] *In quadragesima octaua huius.*

D Linea igitur g l ad e m est perpendicularis.] *Ex diffinitione lineæ perpendicularis. sequitur enim ex dictis angulum g l e angulo g l m esse æqualem.*

E Est autem & angulus a l b rectus.] *Ex antecedente.*

 THEO

THEOREMA LI. PROPOSITIO LI.

Si in hyperbola, uel oppositis sectionibus ad axem comparetur rectangulum æquale quartæ parti figuræ: excedensq; figura quadrata: & à punctis ex comparatione factis ad quamlibet sectionem rectæ lineæ inclinentur: maior minorem quantitate axis superabit.

Sit hyperbole, uel oppositæ sectiones, quarum axis a b, centrum c: & quartæ parti figuræ æquale sit utrumq; rectangulorum a d b, a e b: & à punctis e d ad sectionem inclinentur e f, f d. Dico e f ipsam f d superare quantitate a b. ducatur enim per f linea f k h sectionem contingens: & per c ducatur g c h æquidistans f d. erit angulus k h g angulo k f d æqualis; alterni enim sunt: & angulus k f d æqualis angulo g f h. ergo & g f h ipsi g h f, lineaq; f g lineæ g h, & linea f g ipsi g e æqualis erit; quod & a e æqualis sit d b, & a c ipsi c b, & d c ipsi c e. est igitur linea g h æqualis g e: & ob id f e ipsius g h dupla. Itaque quoniam demonstrata est c h ipsi c b æqualis; erit e f utriusque g c, c b dupla. sed ipsius quidem g c dupla est f d; ipsius uero c b dupla a b. linea igitur e f utrique f d, a b est æqualis: & propterea e f ipsam f d superat quantitate a b. 29. primi A B C D

FED. COMMANDINVS.

A Et angulus k f d æqualis angulo g f h.] *Ex 40. octaua huius.*

B Quod & a e æqualis sit d b.] *Superius enim demonstrauimus e b ipsi a d æqualem esse, quare addita utrique a b, erit a e æqualis b d. uereor tamen, ne potius legendum sit: quod & a d æqualis sit b e. hoc enim ad propositum magis attinere uidetur.*

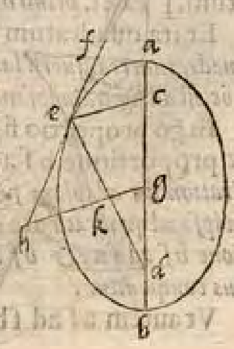
C Itaque quoniam demonstrata est c h ipsi c b æqualis.] *In antecedente scilicet.*

D Sed ipsius quidem g c dupla est f d.] *Est enim ut f e ad e g, ita f d ad g c. sed f e dupla est e g. ergo & f d ipsius g c dupla.* 4. sexti.

THEOREMA LII. PROPOSITIO LII.

Si in ellipsi ad maiorem axem ex utraque parte comparetur rectangulum æquale quartæ parti figuræ, deficiensq; figura quadrata: & à punctis ex comparatione factis ad sectionem rectæ lineæ inclinentur; ipsi axi æquales erunt.

Sit ellipsis, cuius maior axis a b: & sit utrumque rectangulorum a c b, a d b æquale quartæ parti figuræ: & à punctis c d ad sectionem inclinentur rectæ lineæ c e, e d. Dico c e, e d axi a b æquales esse. Ducatur enim linea contingens e f h: & per centrum, quod sit g, ducatur g k h ipsi c e æquidistans. Quoniam igitur angulus c e f est æqualis angulo h e k, & angulus f e c angulo e h k; & e h k angulus ipsi h e k æqualis erit; & linea h k æqualis lineæ k e. & quoniam a g est æqualis g b, & a c ipsi d b; erit & c g ipsi g d æqualis. ergo & e k æqualis k d. & ob id linea quidem e d dupla est h k; linea uero e c dupla k g. Vtraque igitur c e, e d ipsius h g est dupla. sed & a b dupla h g. quare a b ipsis c e, e d æqualis erit. A 2. sexti B C



FED. COMMANDINVS.

A Quoniam igitur angulus c e f est æqualis angulo h e k.] *Ex 40. octaua huius.*

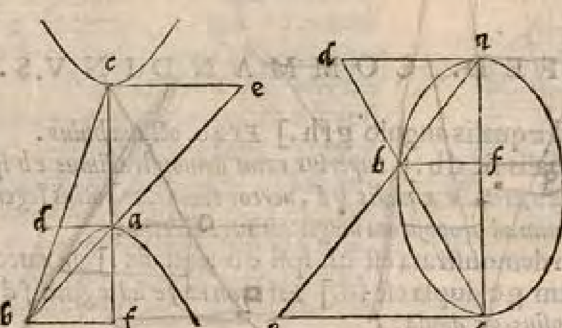
B Et ob id linea quidem e d dupla est h k.] *Est enim d e dupla e k, hoc est h k, quæ ipsi k e æqualis demonstrata est.*

C Sed & a b dupla h g.] *In quinquagesima enim huius demonstrauit h g æqualem esse g a.*

THEOREMA LIII. PROPOSITIO LIII.

Si in hyperbola, uel ellipsi, uel circuli circumferentia, uel sectionibus oppositis ab extremo diametri ducantur lineæ ordinatim applicatis æquidistantes; & à dictis terminis ad idem sectionis punctum lineæ ductæ secent æquidistantes: rectangulum ex abscisis factum æquale erit figuræ, quæ ad eandem diametrum constituitur.

Sit una dictarum sectionum a b c, cuius diameter a c: ducanturq; a d, c e ordinatim applicatis æquidistantes: & a b e, c b d producantur. Dico rectangulum contentum a d, c e figuræ, quæ fit ad a c æquale esse. à puncto enim b linea b f ordinatim
A applicetur. ergo ut rectangulum a f c ad quadratum f b, ita transuersum figuræ latus
B ad rectum; & ita quadratum a c ad ipsam figuram. sed rectanguli a f c ad quadratũ
23. sexti C f b proportio componitur ex proportione a f ad f b, & proportione c f ad f b. ergo



proportio figuræ ad quadratum a c composita est ex proportione b f ad f a, & pro-
D portione b f ad f c. Vt autem a f ad f b, ita a c ad c e: & ut c f ad f b, ita c a ad a d.
E proportio igitur figuræ ad quadratum a c componitur ex proportione e c ad c a, &
23. sexti d a ad a c. sed rectangulum contentum a d, c e ad a c quadratum ex eisdem proportionibus componitur. ergo ut figura ad quadratum, ita est rectangulum contentum a d, c e ad quadratum a c. rectangulum igitur contentum a d, c e figuræ, quæ fit ad a c æquale erit.

FED. COMMANDINVS.

A Ergo ut rectangulum a f c ad quadratum f b, ita transuersum figuræ latus ad rectum.] *Ex 21. primi huius.*

B Et ita quadratum a c ad ipsam figuram.] *Est enim ut transuersum latus ad rectum, ita quadratum transuersi lateris, hoc est quadratum a c ad rectangulum dictis lateribus contentum, hoc est ad figuram ipsam, ex prima sexti, uel ex lemmate in 22. decimi elementorum.*

C Ergo proportio figuræ ad quadratum a c composita est ex proportione b f ad f a; & proportione b f ad f c.] *Quoniam enim ut rectangulum a f c ad quadratum f b, ita quadratum a c ad ipsam figuram; erit conuertendo, ut quadratum f b ad rectangulum a f c, ita figura ipsa ad quadratum a c. sed proportio quadrati f b ad rectangulum a f c componitur ex proportione b f ad f a, & b f ad f c. ergo & proportio figuræ ad quadratum a c ex eisdem proportionibus componitur.*

D Vt autem a f ad f b, ita a c ad c e; & ut c f ad f b ita c a ad a d.] *Ex quarta sexti ob*

simili

ſimilitudinem triangulorum a b f, a e c: & triangulorum c b f c d a.

Proportio igitur figuræ ad quadratum a c componitur ex proportione e c ad c a. & d a ad a c.] *Nam conuerſa proportio ex eiſdem proportionibus conuerſis componitur, ut ſuperius probatum eſt. uereor tamen ne hæc propoſitio ab aliquo inuerſa ſit, manifeſtior enim eſſet, ſi hoc modo explicaretur.* E

A puncto enim b linea b f ordinatim applicetur. ergo ut quadratum f b ad rectangulum a f c, ita rectum figuræ latus ad tranſuerſum: & ita figura ipſa ad quadratum a c. ſed proportio quadrati f b ad rectangulum a f c componitur ex proportione b f ad f a; & proportione b f ad f c. ergo & proportio figuræ ad quadratum a c ex eiſdem proportionibus componitur. Vt autem b f ad f a, ita e c ad c a: & ut b f ad f c, ita d a ad a c. proportio igitur figuræ ad quadratum a c compoſita eſt ex proportione e c ad c a, & proportione d a ad a c. & reliqua, quæ deinceps ſequuntur.

THEOREMA LIIII. PROPOSITIO LIIII.

SI coni ſectionem, uel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ ſibi ipſis occurrant: & per tactus ducantur contingentibus æquidiſtantes: à tactibus uero ad idem ſectionis punctum ductæ lineæ æquidiſtantes ſecent: rectangulum ex abſciſsis conſtans ad quadratum lineæ tactus coniungentis, proportionem habebit compoſitam ex proportione, quam habet quadratum portionis lineæ ab occurſu contingentium ad punctum medium coniungentis tactus ductæ, quæ eſt intra ſectionem, ad reliquæ portionis quadratum: & ex proportione, quam habet rectangulum ex contingentibus factum ad quartam partem quadrati lineæ tactus coniungentis.

Sit coni ſectio, uel circuli circumferentia a b c; quam contingant rectæ lineæ a d, d c: & iuncta a c, bifariam in puncto e diuidatur: iungaturq; d b e. a puncto autem a ducatur linea a f ipſi c d æquidiſtans: & à puncto c linea c g æquidiſtans a d. denique ſumpto in ſectione quouis puncto h, iungantur a h, c h: & ad puncta g f producantur. Dico rectangulum conſtans ex a f, c g ad quadratum a c proportionem habere compoſitam ex proportione quadrati e b ad quadratum b d, & proportione rectanguli a d c ad quartam partem quadrati a c; hoc eſt ad rectangulum a e c. [Ducatur enim à puncto quidem h linea h k l x o: a puncto autem b linea b m n, quæ ipſi a c æquidiſtent. perſpicuum eſt lineam m n ſectionem contingere. & cum a e ſit æqua- A B
lis e c, erit & m b ipſi b n æqualis; & k o ipſi o l; & h o ipſi o x; & k h ipſi x l.] Itaque C D E
quoniam b m m a ſectionem contingunt, & ipſi m b æquidiſtans ducta eſt k h l; erit ut quadratum a m ad quadratum m b, hoc eſt ad rectangulum m b n, ita a k quadratum ad rectangulum x k h, hoc eſt ad rectangulum l h k: & permutando ut quadratũ a m ad quadratum a k, ita m b n rectangulum ad rectangulum l h k, ut autem rectan- F
gulum ex n c m a ad quadratum a m, ita rectãgulum ex l c, k a ad quadratum a k. ergo ex æquali ut rectangulum ex n c, m a ad rectangulum m b n, ita rectangulum ex l c, k a ad rectangulum l h k. ſed rectangulum ex l c, k a ad rectangulum l h k proportionem habet compoſitam ex proportione c l ad l h, hoc eſt G
f a ad a c, & proportione a k ad k h, hoc eſt g c ad H
c a. hæc autem eadem eſt, quæ proportio rectanguli ex g c, f a ad quadratum a c. Vt igitur rectangulum ex n c, m a ad rectangulum m b n, ita rectãgulum ex g c, f a ad quadratum a c. rectangulum uero ex n c, m a ad rectangulum m b n, ſumpto medio rectangulo n d m, habet proportionem compoſitam ex propor-

tione rectanguli ex n c, m a ad rectangulum n d m, & proportione rectanguli n d m ad rectangulum m b n. ergo & rectangulum ex g c, f a ad quadratum a c compositam habet proportionem ex proportione rectanguli ex n c, m a ad rectangulum n d m, &
K proportione rectanguli n d m ad rectangulum m b n. sed ut rectangulum ex n c, m a
L ad rectangulum n d m, ita quadratum e b ad quadratum b d: & ut rectãgulum n d m ad rectangulum m b n, ita rectangulum c d a ad rectangulum a e c. rectangulum igitur ex g c, f a ad quadratum a c compositam propositionem habet ex proportione quadrati e b ad b d quadratum, & proportione rectanguli c d a ad rectangulũ a e c.

EVTOCIVS.

F Vt autem rectangulum ex n c, m a ad quadratum a m, ita rectangulum ex l c, k a ad quadratum a k.] *Quoniam enim ut a d ad d m, ita c d ad d n, erit per conuersionem rationis ut d a ad a m, ita d c ad c n. eadem quoque ratione, & conuertendo demonstrabitur ut k a ad a d, ita l c ad c d. ergo ex æquali & conuertendo ut m a ad a k, ita n c ad c l: & permutando ut m a ad n c, ita a k ad c l. Vt igitur rectangulum ex n c, m a ad quadratum a m, ita rectangulum ex l c, k a ad quadratum a k.*

K Sed ut rectangulum ex n c, m a ad rectangulum n d m, ita quadratum e b ad quadratum b d.] *Nam cum rectangulum ex a m, c n ad rectangulum n d m compositam proportionem habeat ex proportione a m ad m d, & proportione c n ad n d: ut autem a m ad m d, ita e b ad b d: & ut c n ad n d, ita e b ad b d: habebit rectangulum ex a m, c n ad rectangulum n d m*
20. sexti *proportionem duplam eius, quæ est e b ad b d. sed & quadratum e b ad quadratum b d duplam proportionem habet eius, quæ est e b ad b d. quare ut rectangulum ex a m, c n ad rectangulũ n d m, ita quadratum e b ad b d quadratum.*

L Et ut rectangulum n d m ad rectangulum m b n, ita rectangulum c d a ad rectangulum a e c.] *Quoniam enim rectangulum n d m ad rectangulum m b n proportionem habet*
4. sexti *compositam ex proportione d n ad n b, & proportione d m ad m b: ut autem d n ad n b, ita d c ad c e: & ut d m ad m b, ita d a ad a e: habebit quoque proportionem compositam ex proportione d c ad c e, & proportione d a ad a e: quæ quidem proportio eadem est, quam rectangulum c d a habet ad rectangulum a e c. ut igitur rectangulum n d m ad rectangulum m b n, ita rectangulum c d a, ad rectangulum a e c.*

FED. COMMANDINVS.

A Perspicuum est lineam m n sectionem contingere.] *Ex trigesima secunda primi huius.*

B Et cum a e sit æqualis e c, erit & m b ipsi b n æqualis, & k o ipsi o l.] *Ex demonstratis in sextam primi huius.*

C Et h o ipsi o x.] *Ex quadragesima sexta, & quadragesima septima primi huius.*

D Et k h ipsi x l.] *Quoniam enim k o est æqualis o l, & h o ipsi o x, erit & reliqua k h reliquæ x l æqualis.*

E Itaque quoniam m b, m a sectionem contingunt, & ipsi m b æquidistans ducta est k h l; erit ut quadratum a m ad quadratum m b, hoc est ad rectangulum m b n, ita a k quadratum ad rectangulum x k h.] *Ex sexta decima huius.*

G Ex proportione c l ad l h, hoc est f a ad a c.] *Ob similitudinem triangulorum l h c, c f a. est enim angulus l c h æqualis angulo a f c: & angulus l h c angulo f c a. quare & reliquus reliquo est æqualis.*

H Et proportione a k ad k h, hoc est g c ad c a.] *Sunt enim triangula k h a, a c g inter se similia.*

THEOREMA LV. PROPOSITIO LV.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occurrant: & per occursum ducatur linea coniungenti tactus æquidistans: per tactus uero ducantur æquidistantes contingentibus: & à tactibus ad idem

idem alterius sectionis punctum ducantur lineæ, quæ æquidistantes secent: rectangulum ex abscisis constans ad quadratum lineæ tactus coniungentis eandem proportionem habebit, quam rectangulum ex contingentibus factum ad quadratum lineæ ab occursu ad sectionem ductæ, quæ quidem coniungenti tactus æquidistet.

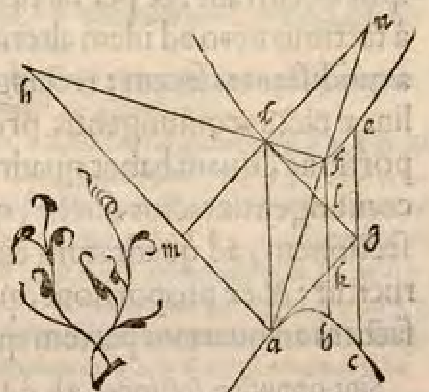
Sint oppositæ sectiones a b c, d e f, quas contingant rectæ lineæ a g, g d: & iuncta a d, ducatur per g linea c g e, ipsi a d æquidistans: & à puncto a ducatur a m æquidistans d g: atque à d linea d m æquidistans a g. Sumatur autem in sectione d f aliquod pũctum f: & iungantur a f n, d f h. Dico ut quadratum c g ad rectangulum a g d, ita esse a d quadratum ad rectangulum ex a h, n d. ducatur enim per f linea f l k b, quæ ipsi a d æquidistet. Quoniam igitur demonstratum est, ut quadratum e g ad quadratum g d, ita rectangulum b l f ad l d quadratum: & est c g æqualis g e; & b k ipsi l f: erit ut quadratum c g ad quadratum g d, ita rectangulum k f l ad quadratum l d: est autem & ut quadratum d g ad rectangulum d g a, ita quadratũ d l ad rectangulum ex d l, a k. ergo ex æquali ut quadratum c g ad rectangulum d g a, ita rectangulum k f l ad rectangulum ex d l, a k. sed proportio rectanguli k f l ad rectangulum ex d l, a k componitur ex proportione f k ad k a, & proportione f l ad l d. ut autem f k ad k a, ita a d ad d n: & ut f l ad l d, ita d a ad a h. proportio igitur quadrati c g ad rectangulum d g a composita est ex proportione a d ad d n, & proportione d a ad a h. sed quadrati a d ad rectangulum ex a h, n d proportio ex eisdem componitur. ergo ut quadratum c g ad rectangulum a g d, ita est a d quadratum ad rectangulum ex a h, n d: & conuertendo ut rectangulum a g d ad quadratum c g, ita rectangulum ex a h, n d ad quadratum a d.

A

B

D

E



FED. COMMANDINVS.

Dico ut quadratum c g ad rectangulum a g d, ita esse a d quadratum ad rectangulum ex a h, n d.] *Sic habent græci codices, sed ego potius ita legendum arbitror. Dico ut rectangulum a g d ad c g quadratum, ita esse rectangulum ex a h, n d ad quadratum a d. hoc enim est, quod & in principio proponit, & in fine concludit.* A

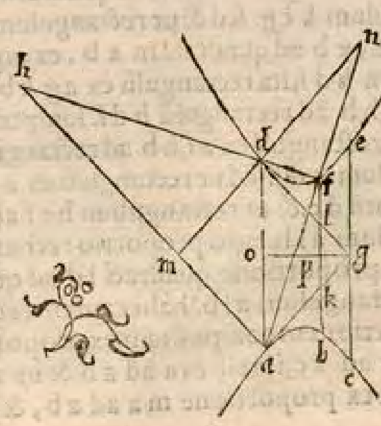
Quoniam igitur demonstratum est, ut quadratum e g ad quadratum g d, ita rectangulum b l f ad l d quadratum.] *In uigesima huius.* B

Et est c g æqualis g e: & b k ipsi l f.] *Secetur linea a d bifariam in puncto o, & iungatur g o, quæ lineam b f in p secet. erit o g oppositarum sectionum diameter recta; transuersa uero, quæ per centrum ducitur, ipsi a d æquidistans. ergo c g est æqualis g e, & b p ipsi p f. sed & k p æqualis est p l, quoniam & a o ipsi o d. reliqua igitur b k reliquæ l f est æqualis.* C

Est autem & ut quadratum d g ad rectangulum d g a, ita quadratum d l ad rectãgulum ex d l, a k.] *Quoniam enim æquidistant a d, b f, ut d l ad l g, ita erit a k ad k g: componendoq; ut d g ad g l, ita a g ad g k: & per conuersionem rationis, ut g d ad d l, ita g a ad a k: & permutando ut d g ad g a, ita d l ad a k. Vt uero d g ad g a, ita quadratum d g ad rectangulum d g a: & ut* D

2. sexti.

lem. in 22 decimi.



dl ad a K,ita dl quadratum ad rectangulum ex dl,& a K.ergo ut quadratum dg ad rectangulum dga,ita quadratum dl ad rectangulum ex dl:& a K.

E Vt autem fK ad ka,ita ad ad dn : & ut fl ad ld,ita da ad ah.] *Ob similitudinem triangulorum afk,nad; itemq; triangulorum lfd,adh.*

THEOREMA LVI. PROPOSITIO LVI.

SI unam oppositarum sectionum duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occurrant: & per tactus ducantur contingentibus æquidistantes: à tactibus uero ad idem alterius sectionis punctum ducantur lineæ, quæ æquidistantes secent: rectangulum ex abscissis constans ad quadratum lineæ tactus coniungentis proportionem habebit compositam ex proportione, quam habet quadratum portionis lineæ ad pũctum medium coniungentis tactus ductæ, quæ est inter dictum punctum, & alteram sectionem, ad quadratum eius, quæ inter sectionem & occursum interiicitur: & ex proportione,quam habet rectangulum ex contingentibus factum ad quartam partem quadrati lineæ tactus coniungentis.

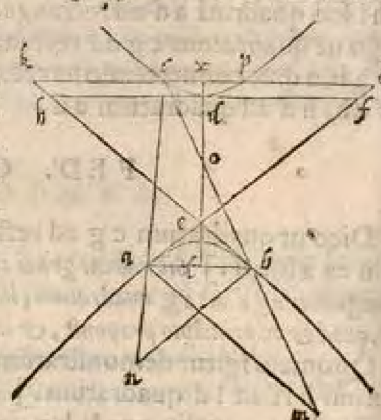
Sint oppositæ sectiones ab,cd, quarum centrum o: lineæq; contingentes aefg, behk:& iuncta ab diuidatur bifariam in l;& iungatur le, & ad d producatur à puncto autem a ducatur am ipsi be æquidistans : & à puncto b ducatur bn æquidistans ae.denique sumpto in cd sectione quouis puncto c,iungantur cbm,can.Dico rectangulum ex bn,am constans ad quadratum ab proportionem habere compositam ex proportione quadrati ld ad quadratum dc, & proportione rectanguli aeb ad quartam partem quadrati ab; hoc est ad rectangulum alb. ducantur enim à punctis cd lineæ cgk,dhf, quæ æquidistent ab.Cum igitur al sit æqualis lb,

A erit & hd ipsi df æqualis: & kx ipsi xg. sed cx

B est æqualis xp. ergo & kc ipsi pg. Et quoniam

C ab cd oppositæ sectiones sunt:lineæq; contingentes,behk, aefg, & ducta est kg æquidistans hd: erit ut quadratum bh ad quadratum hd,ita quadratum bk ad rectangulum pkc. quadratum au-

D tem hd est æquale rectangulo hdf: & rectangulum pKc rectangulo kcg.ergo ut quadratum bh ad rectangulum hdf,ita quadratum bk ad rectan



gulum kcg. sed & ut rectangulum ex fa,hb ad quadratum hb, ita rectangulum ex

E ga, κb ad quadratum κb . ex æquali igitur ut rectangulum ex af, hb ad rectangu-
lum hdf,ita rectangulũ ex ag kb ad rectangulum kcd.proportio autẽ rectãguli ex
af,hb ad rectangulũ hdf. sumpto medio rectangulo hef, componitur ex proportio
ne rectanguli ex af,hb ad rectangulum hef,& proportione rectanguli hef ad rectan

F gulum hdf.sed ut rectangulũ ex af,hb ad rectãgulum hef,ita quadratum ld ad qua

G dratũ dc.& ut rectangulum hef ad rectangulum hdf,ita rectangulum aeb ad rectan
gulum alb,ergo proportio rectanguli ex ag,kb ad rectangulum kcg composita est
ex proportione quadrati ld ad quadratum dc, & proportione rectanguli aeb ad
rectangulum alb. habet autem rectangulum ex ag, Kb ad rectangulum κcg pro-
portionem compositam ex proportione bk ad kc,& proportione ag ad gc. Vtq;
bk ad kc,ita est ma ad ab:& ut ag ad gc,ita nb ad ba.proportio igitur compo-
sita ex proportione ma ad ab, & proportione nb ad ba, quæ quidem eadem est,

quam

quam habet rectangulum ex a m, b n ad quadratum a b; cõponitur ex proportione quadrati l d ad quadratum d e,& proportione rectanguli a e b ad rectangulum a l b.

FED. COMMANDINVS.

Cum igitur a l sit æqualis l b; erit h d ipsi d f æqualis, & k x ipsi x g.] *Ob similitudinem triangulorum a e l, f e d, g e x: & triangulorum b e l, h e d, k e x.* A

Sed est c x æqualis x p. ergo & k c ipsi p g.] *c x est æqualis x p ex quadragesima septima primi huius, quare & reliqua k c reliquæ p g æqualis erit.* B

Et quoniam a b, c d oppositæ sectiones sunt; lineæq; contingentes b e h k; a e f g & ducta est k g æquidistans h d: erit ut quadratum b h ad quadratum h d, ita quadratum b k ad rectangulum p k c.] *Ex decima octaua huius.* C

Quadratum autem h d est æquale rectangulo h d f: & rectangulum p k c rectangulo k c g.] *Nam h d est æqualis d f, ut demonstratum est, & g c ipsi p k.* D

Sed & ut rectangulum ex f a, h b ad quadratum h b, ita rectangulum ex g a, k b ad quadratum k b.] *Quoniam enim triangula a e b, h e f, k e g similia sunt, erit ut f e ad e a, ita h e ad e b: & componendo ut f a ad a e, ita h b ad b e. eadem quoque ratione demonstrabimus, ut g a ad a e, ita* k *b ad b e. quare & conuertendo ut e a ad a g, ita e b ad b k. erat autem ut f a ad a e, ita h b ad b e. ergo ex æquali ut f a ad a g, ita h b ad b k: & permutando ut f a ad h b, ita g a ad* k *b. Sed ut f a ad h b, ita rectangulum ex f a, h b ad quadratum h b: & ut g a ad* k *b, ita rectangulum ex g a, k b ad quadratum* k *b ex prima sexti, uel ex lemmate in 22. decimi. ut igitur rectangulum ex f a, h b ad quadratum h b, ita rectangulum ex g a,* k *b ad quadratum k b.* E

Sed ut rectangulum ex a f, h b ad rectangulum h e f, ita quadratum l d ad quadratum d e.] *Nam rectangulum ex a f, h b ad rectangulum h e f proportionem habet compositam ex proportione a f ad f e, & proportione h b ad h e. Ut autem a f ad f e, ita l d ad d e; & ut h b ad h e, ita l d ad d e. rectangulum igitur ex a f, h b ad rectangulum h e f duplam proportionem habet eius, quæ est l d ad d e. sed & quadratum l d ad quadratum d e proportionem habet eiusdem proportionis duplam. ergo ut rectangulum ex a f, h b ad rectangulum h e f, ita quadratum l d ad quadratum d e.* F

Et ut rectangulum h e f ad rectangulum h d f, ita rectangulum a e b ad rectangulum a l b.] *Rectangulum enim h e f ad rectangulum h d f proportionem compositam habet ex proportione e h ad h d, & proportione e f ad f d. Ut autem e h ad h d, ita e b ad b l; & ut e f ad f d, ita e a ad a l. quare rectangulum h e f ad rectangulum h d f proportionem quoque compositam habebit ex proportione e b ad b l; & proportione e a ad a l; quæ quidem proportio eadem est, quam habet rectangulum a e b ad rectangulum a l b. ergo ut rectangulum h e f ad rectangulum h d f, ita erit rectangulum a e b ad rectangulum a l b. hoc etiam ex quartodecimo lemmate Pappi constare potest.* G

TERTII LIBRI FINIS.

APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIBER IIII.
CVM COMMENTARIIS EVTOCII ASCALONITAE, ET FEDERICI COMMANDINI.

APOLLONIVS ATTALO S. D.

PRIVS quidem ex octo libris, quos de conicis composuimus, tres primos edidi ad Eudemum Pergamenum scriptos. Eo autem mortuo cum reliquos ad te mittere decreuerimus, quòd meorum scriptorum lectionem ambitiose desideras, in præsentia quartum librum mittimus. in eo hæc continentur, ad quot puncta plurima conorum sectiones inter se se, & circuli circumferentiæ occurrere posſint, nisi totæ totis congruant. præterea coni sectio, & circuli circumferentia, & oppositæ sectiones oppositis sectionibus ad quot puncta plurima occurrant. ad hæc alia non pauca his similia. Ex his quod primo loco dictum est, Conon Samius ad Trasideum scribens explicauit, non recte in demonstrationibus uersatus. Itaque Nicoteles Cyrenæus eum leuiter reprehendit. De secundo Nicoteles in libro contra Cononem mentionem sic fecit, tanquam quod demonstrari facile posset. Sed tamen nos neque ab ipso, neque ab alio quopiam demonstratum inuenimus. Tertium uero, & eiusdem generis alia, ne in mentem quidem alicui unquam uenisse comperimus. At quæ diximus ab aliis demonstrata non fuisse, omnia multis, ac uariis, nouisq; theorematibus indigent, quorum plurima in tribus primis libris, reliqua in hoc exposuimus. Horum igitur contemplatio non paruam utilitatem affert, & ad compositiones problematum, & ad determinationes. Nicoteles quidem ob dissensionem, quæ illi cum Conone erat, scribit nihil eorum, quæ à Conone inuenta sunt, ad determinationes pertinere. quod ille falso affirmat, nam & si omnino absque his determinationes reddere posſimus, tamen ex his ipsis non nulla facilius percipiuntur; uelut hoc, quòd aliquid multipliciter fiat, uel quotupliciter, uel rursus quòd nullo modo fiat. quæ quidem cognitio, si antecesserit, ad quæstiones magnam præstat facultatem. præterea ad diffinitionum resolutiones theoremata hæc ualde utilia sunt. quæ etiam si absit utilitas, propter ipsas demonstrationes digna sunt, ut recipiantur. multa enim alia in mathematicis disciplinis ob hoc ipsum, & non ob aliquod aliud recipere consueuimus.

EVTO

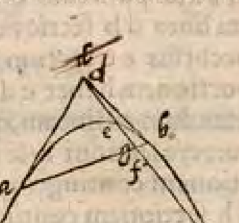
EVTOCIVS.

QVARTVS liber Anthemi Sodalis chariſſime quæſtionem quidem habet, quot modis conorum ſectiones inter ſe ſe, & circuli circumferentiæ; itemq; oppoſitæ ſectiones oppoſitis ſectionibus occurrant. Sed eſt tamen elegans, & legentibus perſpicuus, præſertim ex editione noſtra: ac ne commentarijs quidem ullis indiget: quod enim deeſt ipſæ explent adſcriptiones. In eo autem omnia demonſtrantur argumentatione ducente ad id, quod fieri non poteſt; ſicut & Euclides fecit in ijs, quæ de ſectionibus, circulo, & tactionibus conſcripſit. quæ ſanè ratio & ad uſum accommodata, & neceſſaria Ariſtoteli, ac Geometris, præcipue uero Archimedi uiſa eſt. Itaque tibi quatuor libros perlegenti licebit ex conicorum tractatione reſoluere, & componere quodcumque propoſitum fuerit. quo circa & ipſe Apollonius in principio libri dixit quatuor libros ad huius diſciplinæ elementa ſufficere: reliquos autem quatuor ad abundantiorem ſcientiam pertinere. perlege igitur eos diligenter: & ſi tibi placuerit reliquos ad eandem formam à nobis edi, id quoque Deo duce fiet. Vale.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI in coni ſectione uel circuli circumferentia aliquod punctum extra ſumatur: atque ab eo ad ſectionem ducantur duæ rectæ lineæ, una quidem contingens, altera uero in duobus punctis ſecans: & quam proportionem habet tota linea ſecans ad partem ſui ipſius, quæ extra ſumitur inter punctum & ſectionem interiecta, in eandem diuidatur, quæ eſt intra, ita ut rectæ lineæ eiuſdem rationis ad unum punctum conueniant: quæ à tactu ad diuiſionem ducitur occurret ſectioni: & quæ ab occurſu ducitur ad punctum, extra ſumptum ſectionem continget.

Sit coni ſectio, uel circuli circumferentia a b c; & puncto extra ſectionem ſumpto, quod ſit d, ab eo ducatur linea d b quidem contingens ſectionem in b: d e c uero in punctis e c ſecans: & quam proportionem habet c d ad d e, eandem habeat c f ad f e. Dico lineam, quæ à puncto b ad f ducitur, occurrere ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur ad d, ſectionem contingere. Quoniam enim linea d c ſectionem in duobus punctis ſecat, non erit ipſius diameter. quare licebit per d & diametrum, & lineam contingentem ducere. ducatur à puncto d linea d a ſectionem contingens: & iuncta b a ſecet ipſam e c non in f, ſed in alio puncto g, ſi fieri poſsit. Itaque quoniam lineæ b d, d a ſectionem contingunt: & ad tactus ducta eſt b a: linea uero c d ſectionem in punctis c e ſecat; & ipſam a b ſecat in g: erit ut c d ad d e, ita c g ad g e, quod eſt abſurdum. poſuimus enim, ut c d ad d e, ita eſſe c f ad f e. non igitur b a ſecat e c in alio puncto. quare in ipſo f ſecet neceſſe eſt. A 37·3ij huius B



FED. COMMANDINVS.

Itaque quoniam lineæ b d, d a ſectionem contingunt, & ad tactus ducta eſt b a; lineа uero c d ſectionem in punctis c e ſecat; & ipſam a b ſecat in g, erit ut c d ad d e, ita c g ad g e.] *Ex trigeſima ſeptima tertij huius.* A

Quod eſt abſurdum.] *Nam cum poſuerimus c f ad f e, ut c d ad d e, eſſet c g ad g e ut c f ad f e; & permutando g e ad c f, ut g e ad e f. eſt autem g e maior, quàm c f. ergo & g e maior, quàm e f, ſed & minor. quod fieri non poteſt.* B

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Haec quidem communiter in omnibus ſectionibus demonſtrata ſunt. at in ſola hyperbola, ſi linea d b ſectionem contingat: & d c in punctis e c ſecet: puncta uero e c contineant tactum ad b: & punctum d ſit intra angulum aſymptotis compræhenſum: ſimiliter fiet demonſtratio. poſſumus enim à puncto d aliam ducere contingentem d a, & quæ reliqua ſunt ad demonſtrationem, perficere.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Iisdem exiſtentibus puncta e c tactum ad b non contineant: ſitq; punctum d intra angulum aſymptotis compræhenſum. poterimus à puncto d alteram contingentem ducere, quæ ſit d a, & reliqua ſimiliter demonſtrare.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Iisdem poſitis, ſi occurſus e c contineant tactum ad b: & punctum d ſit in angulo, qui deinceps eſt angulo asymptotis compræhenſo: linea, quæ à tactu ad diuiſionem ducitur, occurret oppoſitæ ſectioni: & quæ ab occurſu ducitur eandem ſectionem continget.

Sint oppoſitæ ſectiones b h, quarum aſymptoti k l, m x n: & punctum d ſit in angulo l x n. ab eo autē ducta linea d b ſectionem contingat: & d c ſecet, ita ut occurſus e c tactum ad b contineant: & quam proportionem habet c d ad d e, habeat c f ad f e. demonſtrandum eſt lineam, quæ à puncto b ad f ducitur, occurrere ſectioni h: & quæ ab occurſu ducitur ad d ſectionem contingere. ducatur enim à puncto d linea d h ſectionem contingens: & iuncta h b, ſi fieri poſsit, 37. tertii huius. non tranſeat per f, ſed per aliud punctum g. eſt igitur ut c d ad d e, ita c g ad g e. quod eſt abſurdum: poſuimus enim, ut c d ad d e, ita eſſe c f ad f e.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Iisdem poſitis, ſi punctum d ſit in una aſymptoton; quæ à puncto b ad f ducitur, eidem aſymptoto æquidiſtabit.

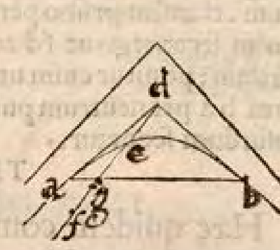
Ponantur enim eadem; & punctum d ſit in aliqua aſymptoton, uidelicet in m n. demonſtrandum eſt lineam, quæ à puncto b ipſi m n æquidiſtans ducitur, in punctum f cadere. non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit 35. tertii huius. b g. erit igitur ut c d ad d e, ita c g ad g e. quod eſt abſurdum.

THEO-

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si in hyperbola aliquod punctum extra ſumatur, à quo ad ſectionem ducantur duæ rectæ lineæ; altera quidem contingens; altera uero æquidiſtans uni aſymptoton: & portio æquidiſtantis inter ſectionem, & punctum interiecta, æqualis ſit ei, quæ intra ſectionem continetur: linea, quæ à tactu ad factum punctum ducitur occurret ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur ad punctum extra ſumptum ſectionem continget.

Sit hyperbole a e b, & ſumatur aliquod punctum extra, quod ſit d. ſit autem primo d intra angulum aſymptotis contentum: & ab ipſo d linea quidem d b ducta ſectionem contingat; d e f uero æquidiſtet alteri aſymptoton: ponaturq; ipſi d e æqualis e f. Dico lineam, quæ à puncto b ad f ducitur, occurrere ſectioni, & quæ ab occurſu ducitur ad d, ſectionem contingere. Ducatur enim d a, quæ ſectionem contingat: & iuncta b a ſecet ipſam d e, ſi fieri poteſt, non in f, ſed in alio puncto g. erit d e æqualis e g, quod eſt abſurdum, ponebatur enim d e ipſi e f æqualis. 30. tertii huius.



THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Iiſdem poſitis, ſit punctum d in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur. Dico etiam ſic eadem euenire.

Ducatur enim d h ſectionem contingens, & iuncta h b, ſi fieri poteſt, non cadat in f, ſed in aliud punctum g. ergo d e eſt æqualis e g. quod eſt abſurdum; ponebatur enim d e æqualis e f. 31. tertii huius.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

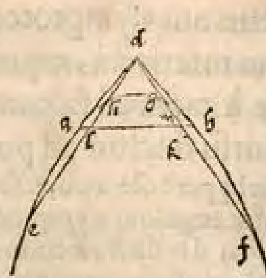
Iiſdem poſitis, ſit punctum d in una aſymptoton; & reliqua eadem fiant. Dico lineam, quæ à tactu ad extremam partem ſumptæ ducitur; æquidiſtantem eſſe aſymptoto, in qua eſt punctum d.

Sint enim eadem, quæ ſupra: ponaturq; ipſi d e æqualis e f: & à puncto b ducatur b g æquidiſtans m n, ſi fieri poſſit. æqualis igitur eſt d e ipſi e g. quod eſt abſurdum: poſuimus enim d e ipſi e f æqualem eſſe.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si ab eodem puncto duæ rectæ lineæ ducantur, quarum utraque coni ſectionem, uel circuli circumferentiam in duobus punctis ſecet: & quam proportionem habent totæ lineæ ad portiones, quæ extra ſumuntur, in eam diuidantur, quæ ſunt intra, ita ut partes eiuſdem rationis ad idem punctum conueniant: quæ per diuiſiones ducitur linea ſectioni in duobus punctis occurret: & quæ ab occurſu ad punctum extra ſumptum ducuntur, ſectionem contingent.

Sit aliqua prædictarum ſectionum a b, & ab aliquo puncto d ducãtur lineæ d e, d f quæ ſectionem ſecent; illa quidem in h e punctis, hæc uero in f g: & quam proportionem habet e d ad d h, eandem habeat e l ad l h: & rurſus quam habet f d ad d g, habeat f k ad k g. Dico lineã, quæ ab l ad k ducitur utraque ex parte occurrere ſectioni: & quæ ab occurſibus ducuntur ad d ſectionem contingere. Quoniam enim utraque linearum e d, d f ſectionem in duobus punctis ſecat, poterimus ab ipſo d ſectionis diametrum ducere. quare & contingentes ex utraque parte. ducantur igitur d a, d b, quæ ſectionem contingant: & iuncta b a, ſi fieri poſſit, non tranſeat per l k, ſed uel per alterum ipſorum tantũ, uel per neutrum. tranſeat primo per l tantum, & lineam f g in puncto m ſecet. ergo ut f d ad d g, ita f m ad m g, quod eſt abſurdum; ponitur enim ut f d ad d g, ita f k ad k g. ſi uero linea b a per neutrum punctorum k l tranſeat, in utraque ipſarum d e, d f, id quod eſt abſurdum ſequetur.



THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Hæc quidem communiter in omnibus, at in ſola hyperbola, ſi alia quidem eadem ſint, unius autem rectæ lineæ occurſus contineant occurſus alterius: & punctum d ſit intra angulum aſymptotis comprehenſum, eadem prorſus euenient, quæ dicta ſunt, ut in ſecundo theoremate tradidimus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

Iiſdẽ poſitis, ſi unius lineæ occurſus occurſus alterius non contineãt, & punctum d ſit intra angulum aſymptotis comprehenſum; & figura, & demonſtratio eadem erit, quæ in tertio theoremate.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

Iiſdem poſitis ſi occurſus unius lineæ, alterius occurſus contineant: & punctum ſumptum ſit in angulo deinceps ei, qui aſymptotis comprehenditur: linea per diuiſiones ducta, ſi producatur, occurret oppoſitæ ſectioni: & quæ ab occurſibus ducuntur ad punctum d, oppoſitas ſectiones contingent.

Sit hyperbole e g, cuius aſymptoti n x, o p, & centrum r: punctum uero d ſit in angulo x r p: & ducantur d e, d f, quarum utraque hyperbolen in duobus punctis ſecet: & puncta e h à punctis f g cõtineantur ſitq; ut e d ad d h, ita e k ad k h: & ut f d ad d g, ita f l ad l g. demonſtrandum eſt lineã per k l ductam occurrere ſectioni e f, & ei, quæ ipſi opponitur: & quæ ab occurſibus ducuntur ad d, ſectiones contingere. ſit ſectio oppoſita m: & a puncto d ducantur d m, d s, quæ ſectiones contingant: iunctaq; m s, ſi fieri poſſit, non tranſeat per k l, ſed uel per alterum ipſorum, uel per neutrum. tranſeat primũ per k, & ſecet f g in χ. eſt igitur ut f d ad d g, ita f χ ad χ g, quod eſt abſurdom: ponitur enim ut f d ad d g, ita f l ad l g. ſi uero m s per neutrum punctorum k l tranſeat, in utraque ipſarum e d, d f eueniet illud, quod fieri non poteſt.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

Iisdem positis si punctum d sit in una asymptoton, & reliqua eadem existãt: quæ per diuisiones transit linea asymptoto, in qua est punctum, æquidistabit; & producta occurret sectioni: quæ uero ab occursu ad pũctum ducitur, sectionem continget.

Sit hyperbole, & asymptoti: sumptoq; in una asympto-ton puncto d, ducantur rectæ lineæ, & diuidantur, ut dictum est: & ab ipso d linea d b sectionem contingat. Dico eam, quæ à puncto b ducitur ipsi o p æquidistans, per pũcta k l transire. si enim non, uel per unum ipsorum transibit, uel per neutrum. transeat primo per k tantum. quare ut f d ad d g, ita f x ad x g. quod est absurdum. non igitur à puncto b ducta æquidistans p o per unum tantum eorum transibit. ergo per utrumque transeat necesse est.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XIIII.

Iisdem positis si punctum d sit in una asymptoton: & linea quidem d e sectionem in duobus punctis secet; d g uero alteri asymptoto æqui distans secet in uno tantum, quod sit g: fiatq; ut e d ad d h, ita e K ad K h: & ipsi d g ponatur æqualis g l: quæ per puncta K l transit linea, & asymptoto æquidistabit, & sectioni occurret: quæ uero ab occursu ducitur ad d, sectionem continget.

Similiter enim, ut in superioribus, ducta linea d b contingente, dico eam, quæ à puncto b ducitur, asymptoto p o æquidistans, per puncta k l transire. si enim per K solum transeat, non erit d g ipsi g l æqualis; quod est absurdum: si uero per l solum, non erit ut e d ad d h, ita e K ad K h. Quòd si neque per K transeat, neque per l, in utrisque id, quod est absurdum, sequetur. ergo per utraque puncta transire necessarium est.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Si in sectionibus oppositis inter duas sectiones sumatur aliquod punctum, & ab ipso duæ lineæ ducantur; altera quidem contingens unam oppositarum; altera uero utramque secans: & quam proportionem habet linea inter sectionem, quam non contingit, & punctum interiecta ad lineam, quæ est inter punctum, & alteram sectionem, eandem habeat linea quædam maior ea, quæ inter sectiones interiicitur ad excessum ipsius in eadem recta, & ad eundem terminum cum linea eiusdem rationis: quæ à termino maioris lineæ ad tactum ducitur, occurret sectioni, & quæ ab occursu ducitur ad sumptum punctum, sectionem cõtinget.

Sint sectiones oppositæ a b: sumptoq; inter sectiones aliquo puncto d, intra angulum asymptotis contentum, ab ipso ducatur linea quidem d f cõtingens sectionem; a d b uero sectiones secans: & quam proportionem habet a d ad d b, habeat a c ad

o m

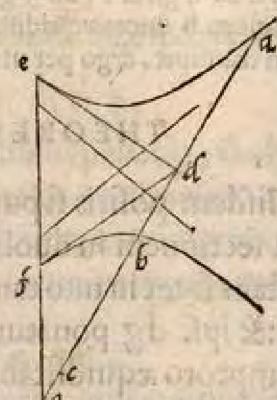
c b. demonstrandum est, lineam à puncto f ad c productam occurrere sectioni. & eam, quæ ab occursu ducitur ad d sectionem contingere. Quoniam enim punctum d est intra angulū, qui sectionem continet; poterimus ab ipso d aliam contingentem ducere, quæ sit d e: & iuncta f e, si fieri potest, per c non transeat, sed per aliud punctum g. erit igitur ut a d ad d b. ita a g ad g b, quod est absurdum: posuimus enim ut a d ad d b ita esse a c ad c b.

49. secūdi huius.

36. primi huius.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVI.

Iisdem positis, sit punctum d in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur: & reliqua eadem fiant. Dico lineam à puncto f ad c productam occurrere oppositæ sectioni: & quæ ab occursu ducitur ad d, eandem sectionem contingere.

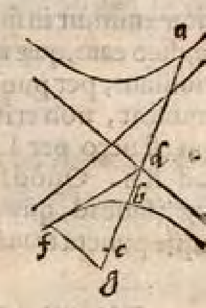


Sint enim eadem, quæ supra: & punctum d sit in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur: atque à pū cto d ducatur d e sectionem a contingens: iuncta autem e f, & producta, si fieri potest, non transeat per c, sed per aliud punctum g: erit ut a g ad g b, ita a d ad d b; quod est absurdum: ponebatur enim ut a d ad d b, ita a c ad c b.

39. tertii. huius.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

Iisdem positis sit punctum d in una asymptoton. Dico lineam, quæ ab f ad c ducitur, asymptoto, in qua est punctum, æquidistare.



Sint eadem, quæ supra: & punctum d in una asymptoton: ductaq; per f eidem asymptoto æquidistans non transeat per c, si fieri potest, sed per g. erit ut a d ad d b, ita a g ad g b, quod est absurdum. ergo quæ à puncto f ducitur asymptoto æquidistans per punctum c trāsibit.

36. tertii huius.

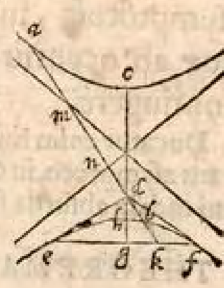
THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

Si in sectionibus oppositis aliquod punctum sumatur inter duas sectiones: & ab ipso duæ lineæ ducantur, utramque sectionem secantes: & quam proportionem habent interiectæ inter unam sectionem & punctum ad eas, quæ inter idem punctum, & alteram sectionem interiiciuntur, eandem habeant lineæ maiores iis, quæ sunt inter sectiones oppositas ad excessus ipsarum: quæ per terminos maiorum linearum transeūt, occurrent sectionibus. & quæ ab occursibus ad sumptum punctum ducuntur, sectiones contingent.

Sint oppositæ sectiones a b: & punctum d inter sectiones: quod quidem primum ponatur in angulo asymptotis contento: & per d lineæ a d b, c d h ducantur. maior igitur est a d, quàm d b, & c d maior, quàm d h, quoniam b n est æqualis a m: quam

uero

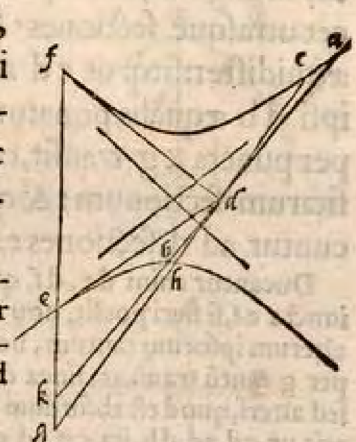
uero proportionem habet a d ad d b, habeat a k ad k b: & quã c d habet ad d h, habeat c g ad g h. Dico lineam, quæ per k g transit, occurrere sectioni; & quæ à puncto d ad occursus ducuntur, sectionem contingere. Quoniam enim punctum d est in angulo asymptotis cõtento, possumus ab eo duas lineas contingentes ducere. Itaque ducantur d e, d f: & e f iungatur, quæ per puncta k g transibit. si enim non, uel transibit per unum ipsorum tantum, uel per neutrum. & si quidem per unum tantum, altera linearum in eandem proportionem ad aliud punctum secabitur; quod fieri non potest: si uero per neutrum, in utrisque id, quod fieri non potest, continget.



THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

Sumatur punctum d in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur: ducanturq; rectæ lineæ sectiones secantes: & ut dictum est, diuidantur. Dico eam, quæ per K g producitur, occurrere utrique sectionum: & quæ ab occursibus ducuntur ad d sectiones contingere.

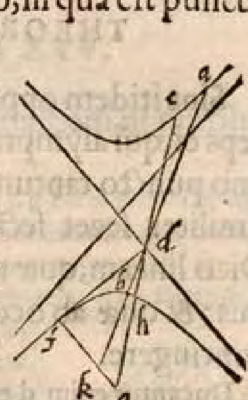
Ducantur enim à puncto d lineæ d e, d f, quæ utramque sectionem contingant. ergo quæ ducitur per e f, per k g transibit. si enim non, uel transibit per alterum ipsarum, uel per neutrum; & rursus eodem modo id, quod est absurdum, concludetur.



THEOREMA XX. PROPOSITIO XX.

Si sumptum punctum sit in una asymptoton, & reliqua eadem fiant: linea, quæ transit per terminos excessuum, asymptoto, in qua est punctũ æquidistabit: & quæ à puncto ducitur ad occursum sectionis, & lineæ per terminos transeuntis, sectionem continget.

Sint oppositæ sectiones a b: & punctum d sit in una asymptoton: & reliqua eadem fiant. Dico lineam, quæ per k g transit, occurrere sectioni; & quæ ab occursu ad d ducitur, sectionem contingere. ducatur enim à puncto d contingens linea d f: & ab f ducatur asymptoto æquidistans, in qua est punctum d. transibit igitur ea per puncta k g; alioqui uel per alterum tantum transibit, uel per neutrum: & ita ea, de quibus dictum est, absurda sequentur.



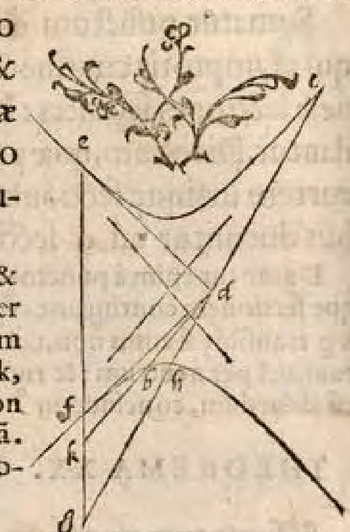
THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXI.

Sint rursus oppositæ sectiones a b: sitq; punctum d in una asymptoton: & linea quidem d b K in uno tantum puncto occurrat sectioni b, alteri asymptoto æquidistans; linea uero c d h g utrique sectioni occurrat: & ut c d ad d h, ita c g ad g h: & ipsi d b æqualis sit b K. Dico lineam,quæ per puncta K g transit, occurrere sectioni; asymptotoq; , in qua est punctum d, æquidistare: & quæ ab occursu ad punctum d ducitur, sectionem contingere.

Ducatur enim linea contingens d f: & ab f ducatur æquidistans asymptoto, in qua est d. transibit ea per puncta k g: alioqui eadem absurda sequantur necesse est.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXII.

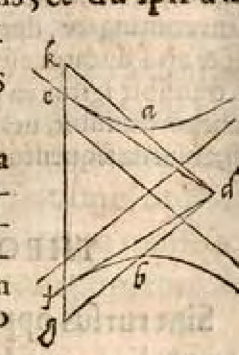
Sint similiter oppositæ sectiones, asymptotiq;: & punctum d sumatur in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur: linea uero c d h secet utrasque sectiones · & d b alteri asymptoto æquidistet: sitq; ut c d ad d h, ita c g ad g h: & ipsi d b æqualis ponatur b K. Dico lineam, quæ per puncta K g transit, occurrere utrique oppositarum sectionum: & quæ ab occursibus ducuntur ad d, sectiones easdem contingere.



Ducantur enim d e, d f, quæ sectiones contingant: & iuncta e f, si fieri possit, non transeat per k g: sed uel per alterum ipsorum tantum, uel per neutrum. & siquidem per g tantũ transeat, linea d b non erit æqualis ipsi b k, sed alteri, quod est absurdum. si uero tantum per k, non erit ut c d ad d h, ita c g ad g h, sed alia quædam ad aliã. Quod si per neutrum ipsorum k g transeat, utraque absurda sequentur.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

Sint itidem oppositæ sectiones a b: punctumq; d sit in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur: & linea quidem b d sectionem b in uno puncto tantum secet, alteri asymptoto æquidistans: linea uero d a similiter secet sectionem a: sitq; d b ipsi b g æqualis; & d a ipsi a K. Dico lineam, quæ transit per K g occurrere sectionibus: & quæ ab occursibus ad d ducuntur, sectiones contingere.

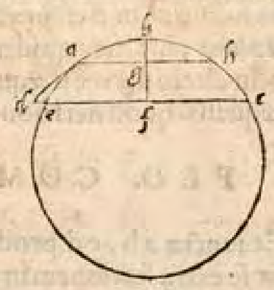


Ducantur enim d e, d f, quæ contingant sectiones: & iuncta e f non transeat per k g, si fieri potest, sed uel per alterum ipsorum, uel per neutrum. ex quibus sequitur, ut uel d a non sit æqualis a k, sed alij cuipiam, quod est absurdum: uel d b non sit æqualis b g: uel neutra neutræ sit æqualis: & ita in utrisque idem continget absurdum. linea igitur e f per puncta k g necessario transibit.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXIIII.

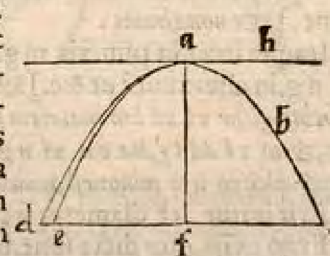
Coni sectio coni sectioni, uel circuli circumferẽtiæ non occurrit ita, ut pars quidem eadem sit; pars uero non sit communis.

Si enim fieri potest, coni sectio d a b c circuli circumferentiæ e a b c occurrat, ut ipsarum communis pars sit eadem a b c, non communis autem a d, a e: & sumpto in ipsis puncto h iungatur h a: & per quod uis punctum e ducatur d e c, æquidistãs a h: sectaq; a h bifariam in g, ducatur per g diameter b g f. ergo quæ per b ipsi a h æquidistans ducitur, utramque sectionem continget: & æquidistabit d e c: eritq; in altera quidem sectione d f æqualis f c: in altera uero e f æqualis f c. quare & d f ipsi f e æqualis erit. quod fieri non potest. 32. primi huius. 30 primi elem. 46.& 47. primi huius.

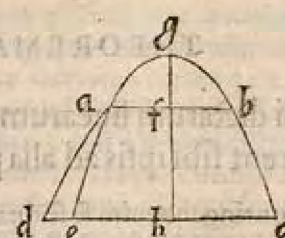


EVTOCIVS.

ALITER. Sint sectiones d a b c, e a b c: ducaturq; linea d e c quomodocũque cõtingat: & per a ipsi d e c æquidistans ducatur a h. si igitur a h intra sectiones cadit, congruet ea demonstratio, quæ ab Apollonio affertur: si uero contingit in puncto a, & utrasque sectiones continget. ergo diameter alterius sectionis, quæ ab a ducitur, reliquæ etiam diameter erit: & propterea in puncto f secabit, & lineam d c, & c e. quod fieri non potest.



ALITER. Sint sectiones d a b c, e a b c, ut dictum est: & in communi ipsarum parte a b c sumatur punctum b: & ducta a b bifariam secetur in f, perq; f ducatur diameter g f h: & per c linea c e d ipsi a b æquidistans. Quoniam igitur f h diameter est, quæ bifariam secat lineam a b; erit a b ordinatim applicata, & æquidistat c e d. ergo c e bifariam secatur in h. sed in sectione e a b c descripta est e c; & in sectione d a b c, ipsa c d. linea igitur e h lineæ h d est æqualis, quod fieri non potest.

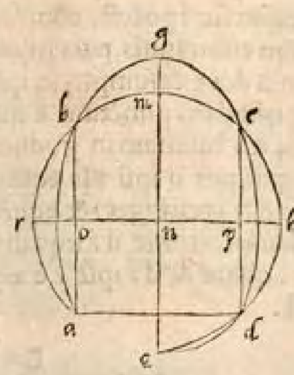


THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

Coni sectio coni sectionem, uel circuli circumferentiam in pluribus punctis, quãm quatuor non secat.

Si enim fieri potest, secet in quinque punctis a b c d e: sintq; a b c d e occursus deinceps, nullum intermedium relinquentes: & iunctæ a b, c d producantur, quæ conuenient inter se extra sectionem in parabola & hyperbola. Itaque conueniant in l: & A
quam proportionem habet a l ad l b, habeat a o ad o b: quam uero d l habet ad l c,
habeat d p ad p c. ergo quæ à puncto p ad o iuncta producitur ex utraque parte, occurret sectioni: & quæ ab occursibus ducuntur ad l sectiones contingent. occurrat in punctis h r: & h l, l r iungantur. contingent igitur hæ sectiones; & e l utraque secabit, quoniam inter b c nullus est occursus. Itaque secet in punctis m g. ergo in altera quidem sectione erit ut e l ad l g, ita e n ad n g: in altera autem ut e l ad l m, ita e n ad n m, quod fieri non potest. quare neque illud, quod à principio ponebatur. si B C
uero a b, d c æquidistent, sectiones erunt ellipsis, uel circuli circumferentia. diuidantur a b c d bifariam in o p; & iuncta p o ad utrasque partes producatur, quæ sectionibus occurrat in h r. erit igitur h r diameter sectionum, & a b, c d ad ipsam ordinatim applicabuntur. quare à puncto r ducta e n m g ipsis a b, c d æquidistans, secabit D

lineam h r,& utramque sectionem, propterea quod
E alius occursus non est præter a b c d e.ergo ex ijs,quæ dicta sunt, in altera quidem sectione erit e n æqualis n m,in altera uero e n æqualis n g.quare n m ipsi n g est æqualis. quod fieri non potest.



FED. COMMANDINVS.

A Et iunctæ a b, c d producantur, quæ conuenient inter se extra sectionem in parabola,& hyperbola,] *Ex 24. & 25. secundi huius.*

B Ergo quæ à puncto p ad o iuncta producitur ex utraque parte occurrit sectioni,& quæ ab occursibus ducuntur ad l sectiones contingunt.] *Ex nona huius.*

C Itaque secet in punctis m g.ergo in altera quidem sectione,erit ut e l ad l g,ita e n ad n g,in altera autē ut &c.] *Sit linea l g maior,quàm l m, erit contra n m maior,quàm n g.*
8. quinti. *habebit igitur e l ad l m maiorem proportionem,quàm e l ad l g.ut autem e l ad l m, ita e n ad n m,& ut e l ad l g,ita e n ad n g.ergo e n ad n m maiorem proportionem habet, quàm e n ad*
14. quinti 10. *n g:& idcirco n m minor est,quàm n g. sed & erat maior.quod fieri non potest.*

D Erit igitur h r diameter sectionum.] *Ex 28. secundi huius.*

E Ergo ex ijs,quæ dicta sunt,in altera quidem sectione erit e n æqualis n m,in altera uero e n æqualis n g.] *Sunt enim & e m,e g ad diametrum h r ordinatim applicatæ.*

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVI.

Si dictarum linearum aliquæ in uno puncto se se contingant, non occurrent sibi ipsis ad alia puncta plura,quàm duo.

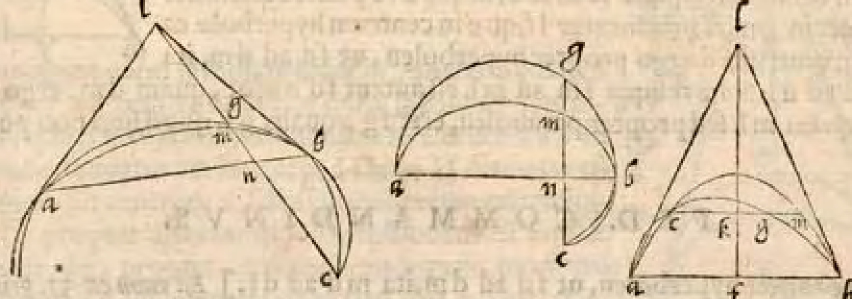
Contingant enim se se duæ quæpiam dictarum linearum in puncto a.Dico eas non occurrere sibi ipsis ad alia puncta plura, quàm duo. nam si fieri potest, occurrant ad puncta b c d: sintq; occursus deinceps,nullum intermedium relinquentes: & iuncta b c producatur.à puncto autem a ducatur cōtingens a l, quæ quidem continget duas sectiones,& cum linea b c cōueniet.Conueniat in l:& fiat ut c l ad l b, ita c p ad p b:
9. huius. iungaturq; a p,& producatur. occurret ea sectionibus, & quæ ab occursibus ad punctum l ducuntur, sectiones contingent. Itaque occurrat in punctis h r, & iungantur h l, l r,quæ contingent sectiones. ergo quæ à puncto d ad l ducitur utramque sectionem secabit; & eadem quæ dicta sunt,absurda sequentur. non igitur se secant ad plura puncta,quàm duo.si uero in ellipsi,& circuli circumferentia c b ipsi a l æquidistet, similiter demonstrationem faciemus,lineam a h diametrum ostendentes.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVII.

Si prædictarum linearum aliquæ in duobus punctis se se contingant, in alio puncto sibi ipsis non occurrent.

Prædictarum enim linearum duæ se se contingant in duobus punctis a b. Dico eas ad aliud punctum sibi ipsis non occurrere. nam si fieri potest,occurrant etiam ad punctum c: sitq; primum c extra a b tactus: & ab ipsis ducantur lineæ contingentes, quæ in punctum l conueniant, ut in prima figura apparet. contingent igitur hæ utramque sectionem: & iuncta c l utramque secabit. secet in punctis g m, & iungatur

tur a n b. ergo in altera quidem sectione erit, ut c l ad l g, ita c n ad n g; in altera uero, ut c l ad l m, ita c n ad n m. quod est absurdum.



At si c g æquidistans sit lineis ad puncta a b contingentibus, ut in ellipsi in secunda figura, iungemus lineam a b, quæ sectionum diameter erit. ergo utraque linearum c g, c m in puncto n bifariam secabitur; quod est absurdum. non igitur sectiones ad aliud punctum sibi ipsis occurrunt, sed ad a b tantum. 27. secundi huius.

Sit deinde c inter tactus, ut in tertia figura perspicuum est sectiones non contingere sese ad punctum c: quoniam ad duo tantum contingentes ponebantur. secent igitur seipsas in c: & à punctis a b ducantur a l, l b, quæ sectiones contingant: iungaturq; a b, & in f bifariam diuidatur. ergo à puncto l ad f ducta diameter erit, quæ quidem per c non transibit: si enim transeat, quæ per c ipsi a b æquidistans ducitur, continget utramque sectionem, quod fieri non potest. Itaque ducatur à puncto c linea c k g m æquidistans a b. erit in altera quidem sectione c k æqualis k g: in altera uero c k æqualis k m. quare k m ipsi k g est æqualis; quod fieri non potest. Eodem modo si contingentes inter se æquidistent, ex iis, quæ diximus, illud, quod fieri non potest, concludetur. 29. secūdi huius.

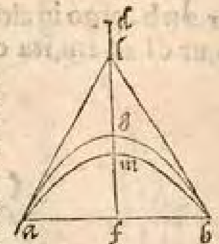
THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXVIII.

Parabole parabolen non contingit, præterquàm in uno puncto.

Si enim fieri potest, parabolæ a g b, a m b in punctis a b sese contingant: & ducantur lineæ contingentes a l, l b. contingent hæ utrasque sectiones; & in punctum l conuenient. Itaque iuncta a b, secetur bifariam in f, & ducatur l f. quoniam igitur duæ lineæ a g b, a m b sese contingunt in punctis a b ad aliud punctum sibi ipsis non occurrent. quare l f utramque sectionem secabit. secet in g m. ergo in altera quidem sectione erit l g æqualis g f; in altera uero l m æqualis m f. quod fieri non potest. non igitur parabole parabolen, præterquam in uno puncto, contingit. ex precedente. 35. primi huius.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXIX.

Parabole hyperbolen non contingit in duobus punctis extra ipsam cadens.



Sit parabole quidem a g b, hyperbole uero a m b: & si fieri potest, se se contingant in punctis a, b, & ab ipsis ducantur lineæ utrãque sectionem contingentes, quæ in l conueniant: iunctaq; a b bifariam secetur in f: & l f ducatur. Itaque quoniam sectiones a g b, a m b se se contingunt in punctis a b, ad aliud punctum sibi
27.huius ipsis non occurrent. quare l f in alio, atque alio puncto sectiones
29.secũdi huius. secat. secet in g m; & producatur l f, quæ in centrum hyperbolæ cadet: sitq; centrum d. ergo propter hyperbolen, ut f d ad d m, ita
A erit m d ad d l: & ita reliqua f m ad m l. est autem f d maior, quàm d m. ergo & f m
19.quinti. 14 maior, quàm m l. sed propter parabolen, erit f g æqualis g l. quod fieri non potest.
35.primi huius.

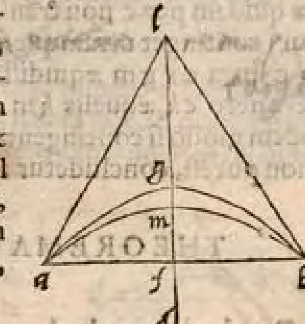
FED. COMMANDINVS.

A Ergo propter hyperbolen, ut f d ad d m, ita m d ad d l.] *Est enim ex 37. primi huius, rectangulum f d l quadrato d m æquale. ergo ut f d ad d m, ita m d ad d l, & ita reliqua f m ad m l.*
14.sexti. 19.quinti.

B Quod fieri non potest.] *Esset enim g f minor, quàm f m.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

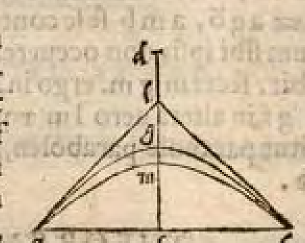
Parabole ellipsim, uel circuli circumferentiam non contingit in duobus punctis intra ipsam cadens.



Sit ellipsis, uel circuli circumferentia a g b, parabole uero a m b: & si fieri potest, in duobus punctis a b se se contingant: & ab ipsis ducantur lineæ contingentes sectiones, quæ conueniant in punctum l: iunctaq; a b secetur in f bifariam: & ducatur l f. secabit igitur l f utramque sectionem in alio, atque alio puncto, uti dictum est. secet in g m: & producatur l f usque ad d, quod sit centrum ellipsis, uel
37. primi huius. circuli. ergo propter ellipsim & circulum, erit ut l d ad d g,
14.sexti ita g d ad d f: & reliqua l g ad g f. estq; l d maior, quàm d g. ergo & l g maior, quàm g f. sed propter parabolen, erit l m æqualis m f. quod fieri non potest.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

Hyperbole hyperbolen idem centrum habens in duobus punctis non continget.

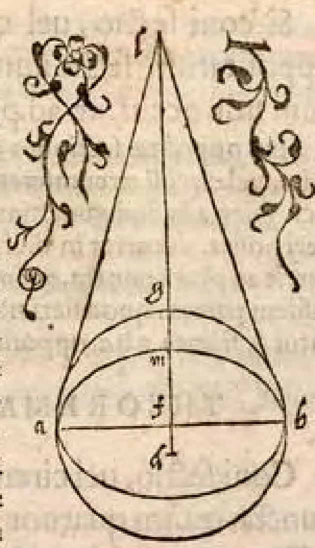


Hyperbolæ enim a g b, a m b idem habentes centrum d, si fieri potest, in punctis a b se se contingant: & ducantur ab ipsis lineæ contingentes, quæ inter se conueniant
30.secũdi huius. a l, l b: iunctaq; d l producatur: & iungatur a b. ergo d f secat bifariam lineam a b in f: & utrasque sectiones in
37.primi huius. g m secat. quare propter hyperbolen a g b, rectangulum f d l est æquale quadrato d g: & propter hyperbolen a m b, rectangulum f d l æquale est quadrato d m. quadratum igitur m d quadrato d g æquale erit. quod fieri non potest.

THEO-

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXII.

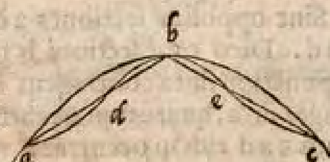
Si ellipsis ellipsim, uel circuli circumferentiam, idem centrum habens in duobus punctis contingat: linea coniungens tactus per centrum transibit.



Contingant enim se se dictæ lineæ in punctis a b: & iuncta a b, per a b puncta ducantur lineæ sectiones contingentes, quæ si fieri possit, conueniant in l: & linea a b in f bifariam diuidatur: & iungatur l f. ergo l f diameter est sectionum. 29. secũdi huius. Sit centrum d, si fieri potest. rectangulum igitur d l f propter alteram quidem sectionem est æquale 37. primi huius. quadrato d g; propter alteram uero æquale quadrato d m. quare g d quadratum quadrato d m æquale erit: quod fieri non potest. non igitur lineæ contingentes à punctis a b ductæ conueniunt. ergo æquidistant inter se: & idcirco linea a b diameter est, quæ per centrum transibit. id quod demonstrandum proponebatur.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

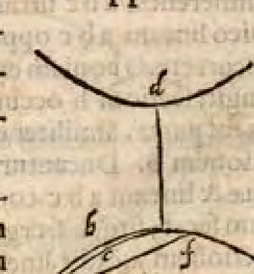
Coni sectio, uel circuli circumferentia, coni sectioni, uel circuli circumferentiæ, quæ non ad easdem partes conuexa habeat, ad plura puncta, quàm duo non occurret.



Si enim fieri potest, coni sectio, uel circuli circumferentia a b c coni sectioni, uel circuli circumferentiæ a d b e c occurrat ad plura puncta, quàm duo, non habens conuexa a b c ad easdem partes. Quoniam igitur in linea a b c sumuntur tria puncta a b c; & a b, b c iunguntur: continent angulum ad easdem partes, in quibus sunt concaua lineæ a b c: & simili ratione lineæ a b, b c eundem angulum continent ad eas partes, in quibus sunt concaua lineæ a d b e c. ergo dictæ lineæ ad easdem partes habent concaua, & conuexa. quod fieri non potest.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XXXIIII.

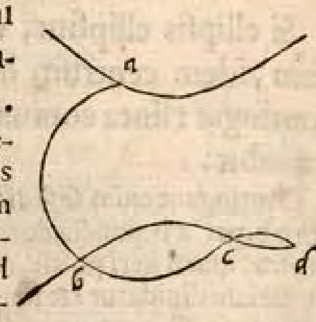
Si coni sectio, uel circuli circumferentia occurrat uni oppositarum sectionum in duobus punctis: & lineæ, quæ inter occursus interiiciuntur, ad easdem partes concaua habeant: producta linea ad occursus alteri oppositarum sectionum non occurret.



Sint oppositæ sectiones d, a c f: & coni sectio, uel circuli circumferentia a b f occurrat alteri oppositarum sectionum in duobus punctis a f: habeantq; a b f, a c f concaua ad easdem partes. Dico lineam a b f productam sectioni d non occurrere. iungatur enim a f. & quoniam d a c f oppositæ sectiones sunt: & recta linea a f in duobus punctis hyperbolen secat, producta non occurret oppositæ sectioni d. quare neque linea a b f eidem occurret. 33. secũdi huius.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XXXV.

Si coni ſectio, uel circuli circumferentia uni oppoſitarum ſectionum occurrat; reliquæ ipſarum non occurret ad plura puncta, quàm duo.



Sint oppoſitæ ſectiones a b: & ipſi a occurrat coni ſectio, uel circuli circumferentia a b c: ſecetq; b in punctis b c. Dico ad aliud punctum ipſi b non occurrere. ſi enim fieri poſsit, occurrat in d. ergo linea b c d ſectioni b c occurrit ad plura puncta, quàm duo, non habens concaua ad 33.huius eaſdem partes. quod fieri non poteſt. ſimiliter demonſtrabitur & ſi linea a b c oppoſitam ſectionem contingat.

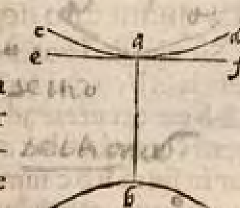
THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XXXVI.

Coni ſectio, uel circuli circumferentia oppoſitis ſectionibus ad plura puncta, quàm quatuor non occurret.

ex antecedente. Hoc autem perſpicue conſtat; nam linea occurrens uni oppoſitarum ſectionum; reliquæ non occurrit ad plura puncta, quam duo.

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XXXVII.

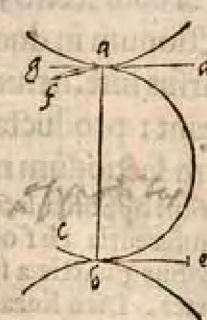
Si coni ſectio, uel circuli circumferentia unam oppoſitarum ſectionum concaua ſui parte contingat, alteri oppoſitarum non occurret.



Sint oppoſitæ ſectiones a b: & ſectionem a contingat linea c a d. Dico c a d ſectioni b non occurrere. ducatur enim per a punctum linea contingens e a f, quæ utramque linearum continget in a. quare non occurret ſectioni b; & propterea neque linea c a d eidem occurret.

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

Si coni ſectio, uel circuli circumferentia utramque oppoſitarum ſectionum contingat in uno puncto; oppoſitis ſectionibus in alio puncto non occurret.



Sint oppoſitæ ſectiones a b: coni autem ſectio, uel circuli circumferentia a b c utramque ipſarum in punctis a b contingat. Dico lineam a b c oppoſitis ſectionibus a b in alio puncto non A occurrere. Quoniam enim a b c ſectionem a in uno puncto contingit, ſectioni b occurrens: non continget ſectionem a concaua ſui parte. Similiter demonſtrabitur neque ita contingere ſectionem b. Ducantur lineæ a d, b e contingentes ſectiones a b; quæ & lineam a b c contingent: ſi enim fieri poteſt, altera ipſa- B rum ſecet; ſitq; a f. ergo inter lineam a f contingentem, & inter ſectionem a, cadit linea intermedia g, quod eſt abſurdum. lineæ igitur a d, b e ipſam quoque a b c contingent. ex quo apparet lineam a b c ad aliud punctum oppoſitis ſectionibus non occurrere.

FED. COMMANDINVS.

Quoniam enim a b c sectionem a in uno puncto contingit, sectioni b occurrẽs, non continget sectionem a concaua sui parte.] *Si enim fieri potest, contingat sectionem a concaua sui parte. ergo ex antecedente, alteri oppositarum sectionum non occurret. Sed & occurrit sectioni b, quod est absurdum.* A

Ergo inter lineam a f contingentem, & inter sectionem a, cadit linea intermedia g, quod est absurdum.] *Ex demonstratis in trigesima sexta primi huius. in græcis autem codicibus ante hæc uerba, non nulla alia legebantur, quæ nos tanquam superflua omisimus.* B

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XXXIX.

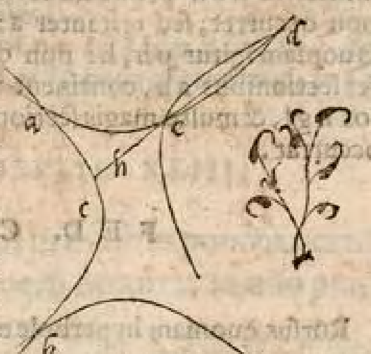
Si hyperbole uni oppositarum sectionum in duobus punctis occurrat, conuexa habens è regione sita; quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret.

Sint oppositæ sectiones a b d, f & hyperbole a b c sectioni a b d occurrat in punctis a b, habens conuexa è regione sita: sitq; sectioni a b c opposita sectio e. Dico ipsam e sectioni f non occurrere. iungatur enim a b, & ad g producatur. Quoniam igitur a b g recta linea secat hyperbolen a b d, producta ex utraque parte extra sectionem cadet. quare non occurret sectioni f. similiter propter hyperbolen a b c, neque occurret oppositæ sectioni e. ergo sectio e sectioni f non occurret. 33.secũdi huius.

THEOREMA XL. PROPOSITIO XL.

Si hyperbole occurrat utrique oppositarum sectionum; quæ ipsi opponitur sectio, nulli oppositarum in duobus punctis occurret.

Sint oppositæ sectiones a b: & a c b hyperbole utrique occurrat. Dico sectionem, quæ ipsi a c b opponitur, sectionibus a b non occurrere in duobus punctis. si enim fieri potest, occurrat in punctis d e; & iuncta d e producatur. ergo propter sectionem d e recta linea d e sectioni a b non occurret: & propter sectionem a e d, non occurret ipsi b: per tres enim locos transibit, quod fieri non potest. Similiter demonstrabitur neque sectioni b in duobus punctis occurrere. Eadem etiam ratione utramque ipsarum non continget. ducatur enim linea contingens h e, quæ continget utramque sectionem. ergo propter sectionem d e ipsi a c non occurret: & propter sectionem a e non occurret sectioni b. quare neque a c sectio sectioni b occurret quod non ponitur. 33.secũdi huius. 33.secũdi huius.



THEOREMA XLI. PROPOSITIO XLI.

Si hyperbole utramque oppositarum sectionum in duobus punctis secet, conuexa habens è regione utrique sita; quæ ipsi opponitur sectio nulli oppositarum occurret.

Sint oppositæ sectiones a b: & hyperbole c a b d utramque secet in duobus punctis, conuexa habens e regione utrisq; sita. Dico sectionem oppositam e f nulli ipsarum a b occurrere. si enim fieri potest, occurrat sectioni a in puncto e: & iunctæ c a, d b producantur. conuenient hæ

25. secūdi huius.

inter se se. Itaque conueniant in h. erit igitur h in angulo asymptotis sectionis c a b d contento, cui opponitur sectio e f. ergo quæ à puncto e ad h ducitur, cadit intra angulum contentum lineis a h b. Rursus quoniam hyperbole est c a e, occurruntq; sibi ipsis c a h, h e: & c a occursus non continent occursum e: punctum h erit inter asymptotos sectionis c a e. atq; est ipsi opposita sectio b d. ergo quæ à puncto b ducitur ad h intra angulum c h e cadit, quod est absurdum; cadebat enim intra angulum a h b. non igitur e f alicui oppositarum sectionum a b occurret.

E V T O C I V S.

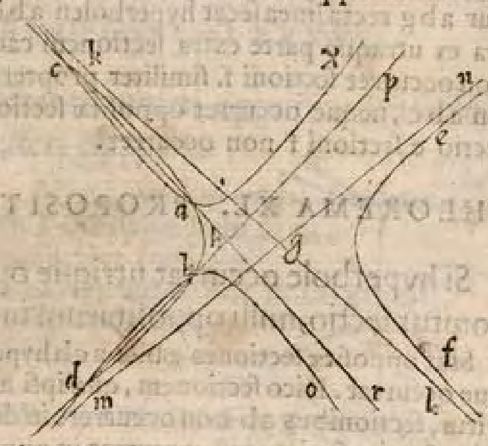
ALITER. Sint oppositæ sectiones a b: & hyperbole c a b d utramque ipsarum in punctis c a b d secet: & sit sectio ipsi opposita e f. Dico e f nulli oppositarum sectionum occurrere. iunctæ enim d b, c a

25. secūdi huius.

producantur: & conueniant inter se in puncto h. erit igitur h inter asymptotos sectionis c a b d. sint c a b d sectionis asymptoti k g l, m g n. perspicuum est lineas n g l sectionem e f continere. At

33. secūdi huius.

linea c a h sectionem c a x in duobus punctis c a secat. ergo producta ex utraque parte non occurret oppositæ sectioni d b o. sed erit inter b o, & lineam g l. Similiter & d b h producta sectioni c a x non occurret, sed erit inter a x, & g n. Quoniam igitur p h, h r non occurrentes sectionibus a b, continent asymptotos n g l, & multo magis sectionem e f; sequitur ut e f nulli oppositarum sectionum occurrat.



FED. COMMANDINVS.

Rursus quoniam hyperbole est c a e, occurruntq; sibi ipsis c a h, h e; & c a occursus non continent occursum e: punctum h erit inter asymptotos sectionis c a e. *Vereor ne locus corruptus sit, neq; enim punctum h necessario cadere uidetur inter asymptotos sectionis*

25. secūdi huius.

c a e, nisi linea e h sectionem c a e, uel contingat, uel in duobus punctis secet; quod non ponitur, præterea quomodo ex his absurdum sequatur, non facile apparet. sed tamen possumus demonstrationem absoluere in hunc modum.

Rursus quoniam recta linea d b h sectionem d b o secat in duobus punctis, producta non occurret oppositæ sectioni c a e. quare si à puncto e eiusdem sectionis linea ducatur e h, cadet extra ipsam h b, hoc est extra angulum a h b: quod est absurdum; cadebat enim intra. non igitur e f ulli oppositarum sectionum a b occurret.

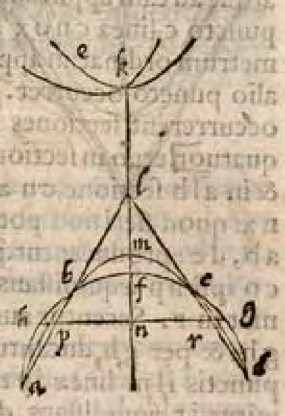
IN ALIAM DEMONSTRATIONEM, QVAM AFFERT EVTOCIVS.

Sed erit inter b o & lineam g l.] *Recta enim linea c ab r, quæ hyperbolen c ab d in duobus punctis secat, si producatur, asymptoto k g l occurret ad partes k, ex octaua secundi huius. quare ei non occurret in alio puncto, & inter sectionem b o, & asymptoton g l cadet. Eadem quoque ratione recta linea d b h p inter a x sectionem, & asymptoton g n cadat necesse est.*

THEOREMA XLII. PROPOSITIO XLII.

Si hyperbole unam oppositarum sectionum in quatuor punctis secet, quæ ipsi opponitur sectio, non occurret alteri oppositarum.

Sint oppositæ sectiones a b c d, e; & hyperbole ipsam a b c d secet in quatuor punctis a b c d: sitq; ei opposita sectio k. Dico k sectioni e non occurrere. si enim fieri potest, occurrat in k: & iunctæ a b, c d producantur, quæ inter se conuenient. A conueniant in l: & quam proportionem habet a l ad l b, habeat a p ad p b: quam uero habet d l ad l c, habeat d r ad r c. ergo linea, quæ per p r producitur, utrique sectioni occurret: B & quæ ab l ad occursus ducuntur sectionem contingent. iungatur k l, & producatur. secabit ea angulum b l c, & sectiones in alio, atque alio puncto. Itaque secet in f, m. ergo propter oppositas sectiones a h f g d, K, erit ut n K ad K l, ita n f ad f l: & propter sectiones a b c d, e, ut n k ad k l, ita erit n m ad m l. quod fieri non potest. non igitur sectiones e K sibi ipsis occurrunt.



FED. COMMANDINVS.

A Quæ inter se conuenient.] *Ex uigesima quinta secundi huius.*

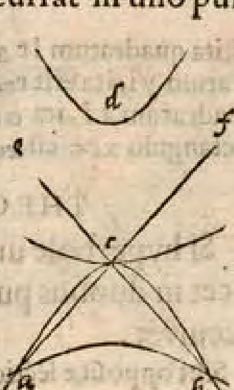
B Ergo lineæ, quæ per p r producitur, utrique sectioni occurret; & quæ ab l ad occursus ducuntur, sectionem contingent.] *Ex nona huius.*

C Ergo propter oppositas sectiones a h f g d, k, erit ut n k ad k l, ita n f ad f l.] *Est enim per trigesimam sextam primi huius, ut k n ad n f, ita k l ad l f. quare & permutando ut n k ad k l, ita n f ad f l.*

THEOREMA XLIII. PROPOSITIO XLIII.

Si hyberbole alteri oppositarum sectionum in duobus punctis occurrat, concaua habens ad easdem partes; alteri uero occurrat in uno puncto: quæ ipsi opponitur sectio nulli oppositarum occurret.

Sint oppositæ sectiones a b, c: & hyperbole a c b sectioni quidem a b in punctis a, b, occurrat: sectioni uero c occurrat in uno puncto c: sitq; ipsi a c b opposita sectio d. Dico d nulli sectionum a b, c occurrere. iungantur enim a c, b c, & producantur. lineæ igitur a c, b c sectioni d non occurrent. sed neque occurrent sectioni c præterquam in uno puncto c: si enim in alio puncto; oppositæ sectioni a b non occurrent. 33.secũdi huius. positum autem est, a c, b c, occurrere sectioni a b. quare sequitur, ut a c, b c sectioni c in uno puncto c occurrant; sectioni



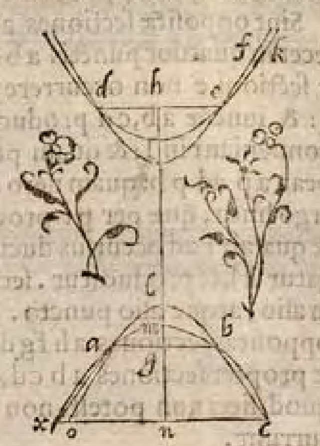
uero d nullo modo. ergo d erit sub angulo e c f: & propterea sectionibus a b, c minime occurret.

THEOREMA XLIIII. PROPOSITIO XLIIII.

Si hyperbole uni oppositarum sectionum occurrat in tribus punctis; quæ ipsi opponitur alteri oppositarum, præterquam in uno puncto, non occurret.

Sint oppositæ sectiones a b c, d e f: & hyperbole a m b c occurrat a b c sectioni in tribus punctis a, b, c. sit autem sectioni a m b c opposita sectio d e k, & ipsi a b c opposita d e f. Dico d e k non occurrere sectioni d e f, præterquam in uno puncto. si enim fieri potest, in punctis d, e occurrat: & iungantur a b, d e; quæ uel æquidistantes sunt inter se, uel non æquidistantes. sint primum æquidistantes: secenturq; a b, d e

36. secūdi huius. bifariam in punctis g, h: & iungatur g h. est igitur g h diameter omnium sectionum; atque ad eam applicantur ordinatim a b, d e. Ducatur à puncto c linea c n o x æquidistans a b. erit & ipsa ad diametrum ordinatim applicata: & sectionibus in alio, atq;

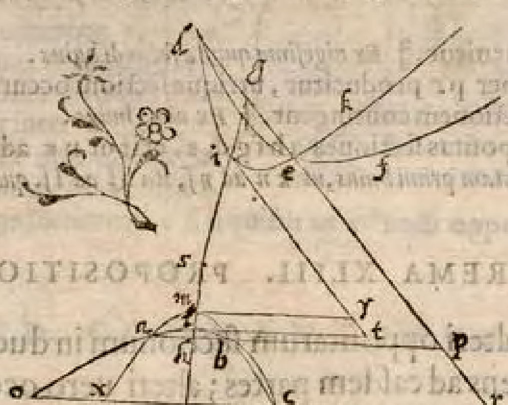


A alio puncto occurret. Si enim in eodem puncto, non occurrerent sectiones sibi ipsis in tribus punctis, sed in quatuor. ergo in sectione a m b erit c n ipsi n x æqualis

B & in a l b sectione, c n æqualis n o. quare o n est æqualis n x: quod fieri non potest. Sed non sint æquidistantes a b, d e: producanturq; & conueniant in p: & ducatur c o ipsi a p æquidistans; quæ cum d p producta conueniat in r. Secentur autem a b, d e bifariam in punctis g, h: & per g, h, ducantur diametri g i f, h l m s: atque à punctis i, l, m lineæ i y t, m y, l t sectiones contingant. erit

5. secūdi huius. igitur i t æquidistans d p: & l t, m y æquidistantes ipsis

19. tertii huius. a p, o r. & quoniam ut quadratum m y ad quadratum y i, ita rectangulum a p b ad rectangulum d p e; erit ut quadratum m y ad quadratum



y i, ita quadratum l t ad quadratum t i. Eadem ratione, ut quadratum m y ad quadratum y i, ita erit rectangulum x r c ad rectangulum d r e. sed ut quadratum l t ad quadratum t i, ita o r c rectangulum ad rectangulum d r e. ergo rectangulum o r c rectangulo x r e est æquale. quod fieri non potest.

THEOREMA XLV. PROPOSITIO XLV.

Si hyperbole unam oppositarum sectionum contingat, alteram uero secet in duobus punctis; quæ ipsi opponitur sectio, nulli oppositarum occurret.

Sint oppositæ sectiones a b c, d: & hyperbole a b d sectionem quidem a b c in pun

ctis

ctis a b fecet; fectionem uero d contingat in d: & fit hyperbole a b d oppofita fectio c e. Dico c e nulli ipfarum a b c, d occurrere. fi enim fieri poteft, occurrat ipfi a b c in c puncto: iungaturq; a b: & per d ducatur contingens, quæ cum linea a b conueniat in f. punctum igitur f erit intra afymptotos a b d fectionis. eft autem ipfi oppofita fectio c e. ergo quæ à puncto c ad f ducitur cadit intra angulum lineis b f d contentum. Rurfus quoniam hyperbole eft a b c, cui occurrunt lineæ a b, c f: & a b occurfus occurfum c non continent: erit punctum f intra afymptotos A fectionis a b c. opponitur autem ipfi fectio d. quæ igitur à c ad f ducta fuerit, intra angulum a f c cadet: quod eft abfurdum; cadebat enim & intra angulum b f d. quare c e nulli oppofitarum fectionum a b c, d occurret.

FED. COMMANDINVS.

Rurfus quoniam hyperbole eft a b c, cui occurrunt lineæ a b, c f: & a b occurfus occurfum c non continent: erit punctum f intra afymptotos fectionis a b c.] *Hoc non neceffario fequi uidetur, nifi linea c f fectionem a b c uel contingat, uel in duobus punctis fecet, quod non ponitur, ut etiam fuperius diximus in commentarijs in 41. huius. poteft tamen fimiliter demonftratio perfici hoc modo.*

Rurfus quoniam recta linea d f fectionem d contingit, fi producatur non occurret oppofitæ fectioni a b c. ergo à puncto c eiufdem fectionis ducta linea ad f, cadet extra ipfam f d, hoc eft extra angulum b f d: quod eft abfurdum; cadebat enim intra. quare c e nulli oppofitarum fectionum a b c, d occurret.

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO XLVI.

Si hyperbole unam oppofitarum fectionum in uno puncto contingat; & fecet in duobus punctis; quæ ipfi opponitur fectio, alteri oppofitarum non occurret.

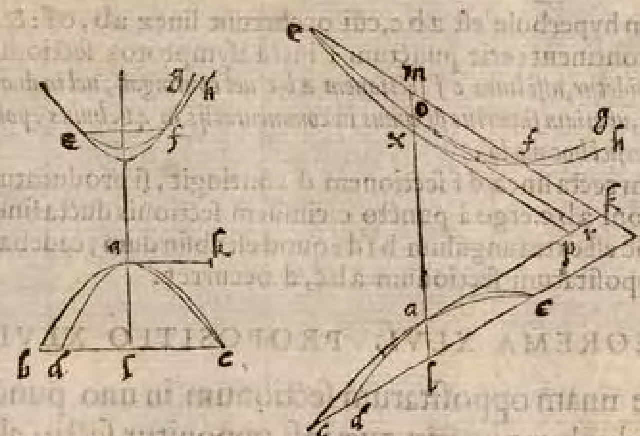
Sint oppofitæ fectiones a b c, d; & hyperbole a g c fectionem a b c contingat quidem in pūcto a; fecet uero in b c: & ipfi a g c oppofita fit fectio e. Dico e fectioni d non occurrere. fi enim fieri poteft, occurrat in d: iunctaq; b c producatur ad f: & à puncto a ducatur linea a f contingens. fimiliter demonftrabitur punctum f effe intra angulum afymptotis contentum: & linea a f utrafque fectiones continget: & d f producta fecabit A fectiones inter a b, uidelicet in punctis g k. quam uero proportionem habet c f ad f b, habeat c l ad l b: & iuncta a l producatur; quæ fectiones in alio atque alio puncto fecabit. fecet in m n. ergo quæ a puncto f ad m n 1. huius. ducuntur fectiones contingent: & fimiliter ijs, quæ dicta funt propter alteram quidem fectionem, ut x d ad d f, ita erit x g ad g f: 36. primi huius, & permutādo. propter alteram uero, ut x d ad d f, ita x k

ad k f. quod fieri non poteſt. non igitur ſectio alteri oppoſitarum occurret.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO XLVII.

Si hyperbole unam oppoſitarum ſectionum contingens in alio puncto ſecet; quæ ipſi opponitur ſectio alteri oppoſitarum non occurret præterquam in uno puncto.

Sint oppoſitæ ſectiones a b c, e f g: & hyperbole quædam d a c contingat a b c in a, & in c ſecet: opponaturq; ipſi d a c ſectio e f h. Dico eam alteri oppoſitarum non occurrere, præterquam in uno puncto. ſi enim fieri poteſt, occurrat in duobus punctis e, f: iungaturq; e f: & per a ducatur ſectiones contingens a k. uel igitur a k, e f
A æquidiſtantes ſunt inter ſe, uel non. ſint primum æquidiſtantes: & ducatur diameter biſariam ſecans ipſam e f, quæ per a tranſibit: atque erit diameter duarum coniugatarum. ducatur etiam per c linea c l d b æquidiſtans ipſis a k, e f. ſecabit igitur eas ſectiones in alio, atque alio puncto: & in altera quidem erit c l æqualis l d, in altera uero c l æqualis l b. quod fieri non poteſt. ſed non ſint æquidiſtantes a k, e f: & conueniant



in k, linea uero c d ipſi a k æquidiſtans ducta conueniat cum e f in n: & diameter a m biſariam diuidens e f, ſectiones in punctis x, o, ſecet: atque ab x, o, ducantur x p, o r ſe-
B ctiones contingentes. erit igitur ut quadratum a p ad quadratum p x, ita quadratum
C a r ad quadratum r o: & propterea ut rectangulum d n c ad rectangulum e n f, ita re-
D ctangulum b n c ad rectangulum e n f. ergo rectangulum d n c rectangulo b n c eſt æquale. quod fieri non poteſt.

FED. COMMANDINVS.

A Et ducatur diameter biſariam ſecans ipſam e f, quæ per a tranſibit.] *Si enim fieri poteſt, diameter à medio lineæ e f ducta non tranſeat per a, ſed per aliud punctum: & ducatur linea à puncto a ad medium e f. erit & ea diameter ex 34. ſecundi huius. quare duæ diametri inter ſe extra centrum conuenient, quod eſt abſurdum.*

B Erit igitur ut quadratum a p ad quadratum p x, ita quadratum a x ad quadratum r o.] *Ob ſimilitudinem triangulorum a p x, a r o.*

C Et propterea ut rectangulum d n c ad rectangulum e n f, ita rectangulum b n c ad rectangulum e n f.] *Eſt enim ex 19. tertij huius, ut quadratum a p ad quadratum p x, ita rectangulum d n c ad rectangulum e n f, & ita rectangulum b n c ad idem e n f.*

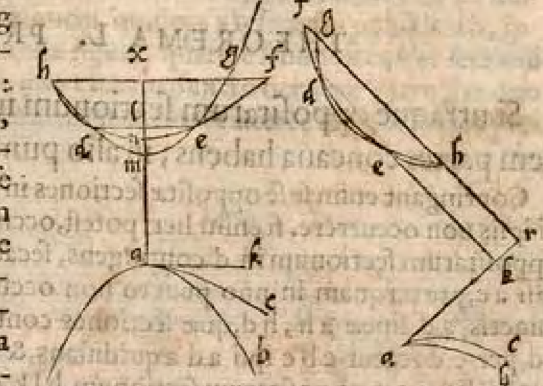
D Ergo rectangulum d n c rectangulo b n c eſt æquale.] *Ex nona quinti elementorum.*

THEO

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO XLVIII.

Si hyperbole unam oppositarum sectionum in uno puncto contingat; quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret ad plura puncta, quàm duo.

Sint oppositæ sectiones a b, d e g: & hyperbole a c sectionem a b in puncto a contingat: sitq; ipsi a c opposita sectio d e f. Dico d e f non occurrere sectioni d e g ad plura puncta, quàm duo. si enim fieri potest, occurrat ad puncta tria d e h: & ducatur recta linea a k, sectiones a b, a c contingens. iuncta uero d e producatur: & sint primum a k, d e inter se æquidistantes: secetur q; d e bifariam in l: & iungatur a l. erit igitur a l diameter duarum coniugatarum, quæ sectiones inter puncta d e secat in m n: quoniam d l e in puncto l bifariam secta est. ducatur ab h linea h x g f æquidistans d e. ergo in altera quidem sectione erit h x æqualis x f; in altera uero h x æqualis x g. quare x f ipsi x g est æqualis: quod fieri non potest. sed non sint a k, d e æquidistantes, conueniantq; in k: & reliqua eadem fiant. producta uero a k occurrat ipsi f h in r. similiter atque in ijs, quæ dicta sunt, demonstrabimus ut rectangulum d k e ad quadratum a k, in sectione f d e, ita esse rectangulum f r h ad quadratum r a: & in sectione g d e, ita rectangulum g r h ad quadratum r a. rectangulum igitur g r h æquale est rectangulo f r h: quod fieri non potest. ergo d e f ipsi d e g ad plura puncta, quàm duo, non occurret. 34. secundi huius.



FED. COMMANDINVS.

Intelligatur hyperbole, quæ unam oppositarum sectionum contingit, uel easdem partes concaua habens; alioquin hæc uera non essent, quod ex 52. huius manifesto apparere potest.

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO XLIX.

Si hyperbole contingat utramque oppositarum sectionum; quæ ipsi opponitur sectio nulli oppositarum occurret.

Sint oppositæ sectiones a b: & hyperbole a b utramque ipsarum in punctis a b contingat: opponaturq; ei sectio e. Dico e nulli sectionum a b occurrere. si enim fieri potest, occurrat sectioni a in d: & à punctis a b ducantur lineæ contingentes sectiones, quæ quidem intra asymptotos sectionis a b conuenient. conueniant in c: & iungatur c d. ergo c d est in loco intermedio inter a c, c b. sed est etiã inter b c, c f. quod fieri non potest. non igitur e sectionibus a b oppositis occurret. A B C

EVTOCIVS.

Dico e nulli sectionum a b occurrere.] *Ducantur enim à punctis a b lineæ contingentes sectiones, quæ conueniant inter se in puncto c, uidelicet intra angulum sectionem a b continentem. Itaque constat lineas a c, b c, si producantur, asymptotis sectionis e non occurrere, sed ipsas continere, & multo magis continere sectionem e. Quoniam igitur a c sectionem a d contingit, non occurret ipsi b g. similiter ostendemus lineam b c sectioni a d non occurrere. ergo sectio e nulli ipsarum a d, b g sectionum occurret.* A 25. secũdi huius. ex demõstratis in 33. secũdi huius. 33

FED. COMMANDINVS.

B Ergo c d est in loco intermedio inter a c, c b.] *Hoc est à puncto d sectionis e d ducta linea ad e intra angulum a c b cadet.*

C Sed est etiam inter b c, c f.] *Quoniam enim linea b c sectionem b contingit, producta non occurret oppositæ sectioni a d. quare si à puncto d eiusdem sectionis linea ducatur ad c, intra angulum b c f cadet; quod est absurdum, cadebat enim intra angulum a c b.*

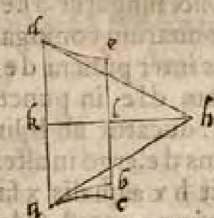
THEOREMA L. PROPOSITIO L.

Si utraque oppositarum sectionum in uno puncto contingat, ad easdem partes concaua habens; in alio puncto non occurret.

Contingant enim sese oppositæ sectiones in punctis a d. Dico eas in alio puncto sibi ipsis non occurrere. si enim fieri potest, occurrant in e. & quoniam hyperbole una oppositarum sectionum in d contingens, secat in e, sectio a b

47 huius ipsi a c, præterquam in uno puncto non occurret. ducantur à punctis a d lineæ a h, h d, quæ sectiones contingant: iunctaque a d, per e ducatur e b c ipsi a d æquidistans, & per h ducatur se-

39 secundi huius. cunda diameter oppositarum sectionum h l k, quæ secabit a d bifariam in k. ergo utraque e b, e c in puncto l bifariam secabitur. & propterea b l æqualis erit l c; quod fieri non potest. non igitur in alio puncto sibi ipsis occurrent.

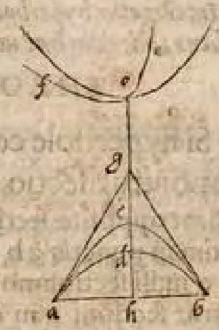


THEOREMA LI. PROPOSITIO LI.

Si hyperbole unam oppositarum sectionum contingat in duobus punctis; quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret.

Sint oppositæ sectiones a d b, e: & hyperbole a c sectionem a d b in duobus punctis a b contingat: opponaturque ipsi a c sectio f. Dico f ipsi e non occurrere. si enim fieri potest, occurrat in e: & à punctis a b ducantur contingentes sectiones a g, g b: iungaturque a b, & e g, ac producatur. secabit igitur sectiones in alio, atque alio puncto: & sit e g c d h. Itaque quoniam a g, g b sectiones contingunt: & a b coniun-

36. primi huius. git tactus, erit in altera quidem coniugatione, ut h e ad e g, ita h d ad d g; in altera uero ut h e ad e g, ita h c ad c g; quod fieri non potest. non igitur sectio f ipsi e occurret.

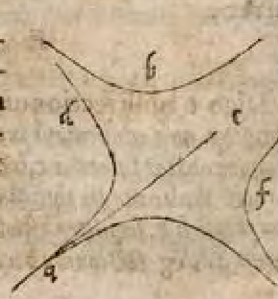


THEOREMA LII. PROPOSITIO LII.

Si hyperbole unam oppositarum sectionum contingat, conuexa habens è regione sita; quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret.

Sint oppositæ sectiones a b & hyperbole quædam a d sectionem a in puncto a contingat: ipsi autem a d opponatur f. Dico f sectioni b non occurrere. Ducatur enim à pun

ex demonstratis in 33. secundi huius. cto a linea a c sectiones contingens. ergo a c propter ipsam a d sectioni f non occurret: & propter a non occurret sectioni b. quare a c inter b f sectiones cadat necesse est: & idcirco b sectioni f non occurrere manifesto constat.

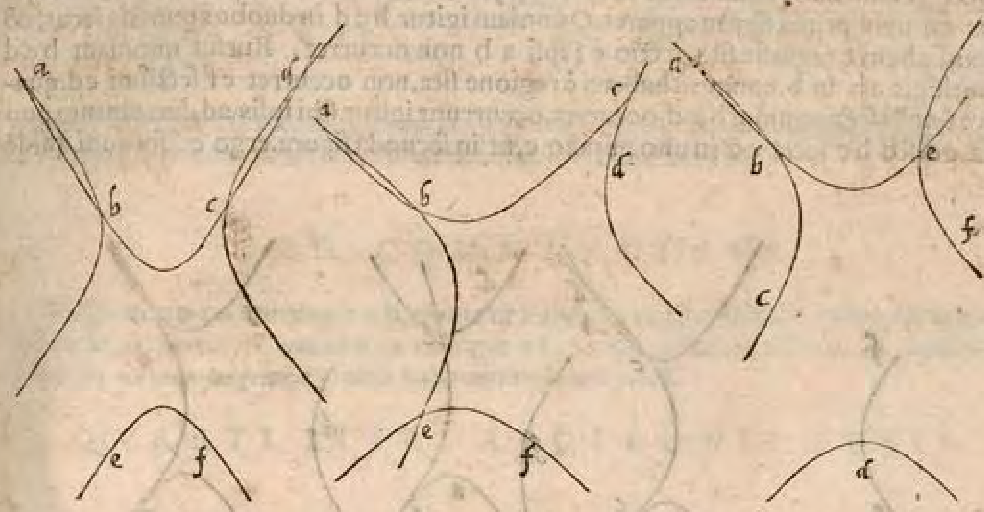


THEO

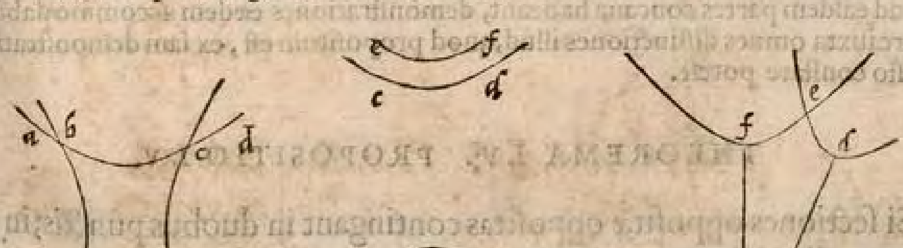
THEOREMA LIII. PROPOSITIO LIII.

Oppositæ sectiones oppositas non secant in pluribus punctis, quàm quatuor.

Sint oppositæ sectiones a b, c d, & aliæ oppositæ a b c d, e f; & secet prius a b c d se
ctio utramque ipsarum a b, c d in quatuor punctis a b c d, conuexa habens è regione
sita; ut in prima figura apparet. ergo quæ sectioni a b c d opponitur, hoc est e f nul- 41.huius
li ipsarum a b, c d occurret. sed a b c sectionem quidem a b secet in punctis a b, ip-
sam uero c d in uno puncto c, ut in secunda figura. quare e f non occurret sectioni 39.huius
c d. si autem sectioni a b occurrit e f in uno tantum puncto occurrit: nam si in duo
bus punctis sectio a b c, quæ ipsi opponitur, non occurret alteri c d. atqui in uno pun 41.huius



cto c occurrere ponitur. quòd si a b c sectionem a b e in duobus punctis a b secet:
ut in tertia figura, occurret quidem e f sectioni a b e, sectioni uero d non occurret,
atque ipsi a b e occurrens non occurret ad plura puncta, quàm duo. si uero a b c d 35.huius
utramque secet in uno puncto, ut in quarta figura, e f nulli ipsarum in duobus pũctis 40.huius
occurret. ergo propter ea, quæ dicta sunt, & ipsorum conuersa, sectiones a b c d, e f
oppositis sectionibus b e, c f non occurrent ad plura puncta, quàm quatuor. At si se-
ctiones ad easdem partes concaua habeant: atque altera alteram in quatuor punctis
a b c d secet, ut in quinta figura, sectio e f alteri non occurret. rursus enim erit a b op 42.huius



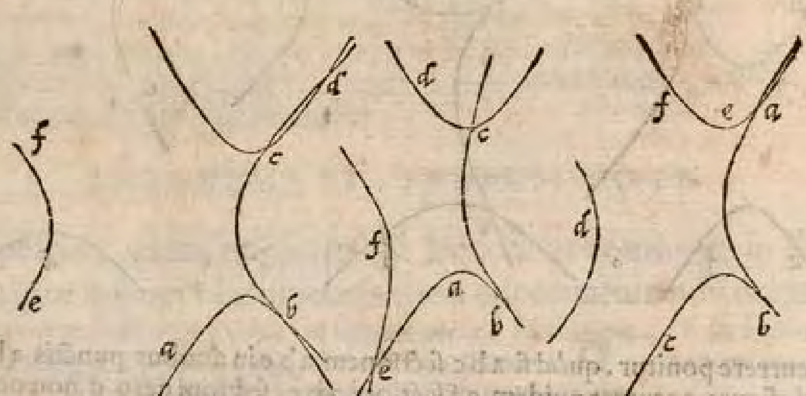
positis sectionibus a b c d e f occurrens ad plura pũcta, quàm quatuor. sed neque c d 36.huius
occurret ipsi e f. si autem, ut in sexta figura, sectio a b c alteri occurrat in tribus pun 44 huius

ctis, e f alteri in uno tantum puncto occurret. & eodem modo in reliquis dicemus. Quoniam igitur iuxta omnes distinctiones constat illud, quod propositum est, oppositæ sectiones oppositis ad plura puncta, quàm quatuor, non occurrent.

THEOREMA LIIII. PROPOSITIO LIIII.

Si oppositæ sectiones oppositas in uno puncto contingant; non occurrent sibi ipsis ad alia puncta plura, quàm duo.

Sint oppositæ sectiones a b c d: & aliæ b c d, e f: & b c d contingat a b in puncto b, conuexa habens è regione sita: occurratq; primum b c d sectio ipsi c d in duobus punctis c d, ut in prima figura apparet. Quoniam igitur b c d in duobus punctis secat, co
39.huius uexa habens è regione sita, sectio e f ipsi a b non occurret. Rursus quoniam b c d
52.huius contingit a b in b, conuexa habens è regione sita, non occurret e f sectioni c d. quare e f nulli sectionum a b, c d occurret. occurrunt igitur sibi ipsis ad duo tantum pun
52.huius cta c d. sed b c secet c d in uno puncto c, ut in secunda figura. ergo e f sectioni quidē



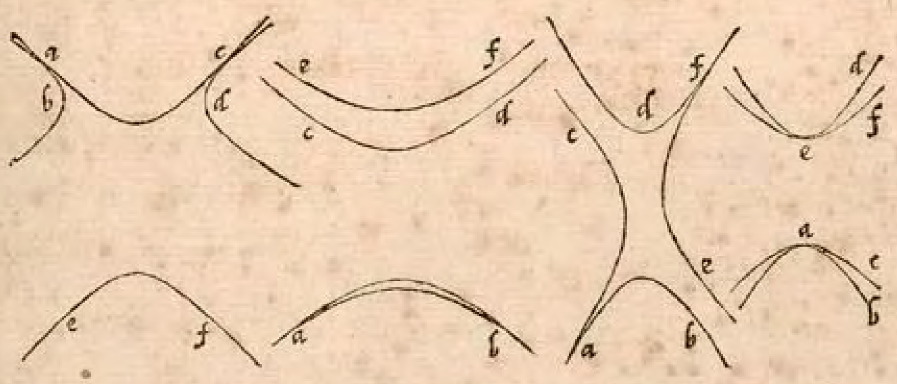
c d non occurret; ipsi uero a b occurret in uno puncto tantum; si enim in duobus
39.huius punctis, non occurret b c ipsi c d. atqui in uno puncto occurrere ponebatur. Quòd
52.huius si b c non occurrat sectioni d, ut in tertia figura, propter ea, quæ dicta sunt, e f ipsi d
35.huius non occurret: & non occurret ipsi a b ad plura puncta, quàm duo. At uero si sectiones ad easdem partes concaua habeant, demonstrationes eædem accommodabūtur. quare iuxta omnes distinctiones illud, quod propositum est, ex iam demonstratis manifesto constare potest.

THEOREMA LV. PROPOSITIO LV.

Si sectiones oppositæ oppositas contingant in duobus punctis; in alio puncto sibi ipsis non occurrent.

Sint oppositæ sectiones a b, c d: & aliæ a c, e f: & primum in punctis a c sese contingant, ut in prima figura. Quoniam igitur a c utramque a b, c d contingit in punctis
49.huius a c, sectio e f nulli ipsarum occurret. Contingant autem sese, ut in secunda figura. si-
51.huius militer c d ipsi e f non occurrere demonstrabitur, sed contingant ut in tertia figura, sectio quidem c a sectionem a b in a, sectio uero d ipsam e f in f. & quoniam c a cōtingit a b, conuexa habens è regione sita, e f sectioni a b non occurret. rursus quoniam

niam fd contingit ef,non occurret ca ipsi df. Denique si ca contingat ab in a,& ef contingat ed in e,habentes concaua ad easdem partes,ut in quarta figura,in alio



puncto sibi ipsis non occurrent:neque ef occurret ipsi ab.iuxta omnes igitur distin ctiones ex iam demonstratis constat illud,quod proponebatur. 50.huius

FED. COMMANDINVS.

Et quoniam ca contingit ab,conuexa habens è regione sita.] *Vide ne hic locus corruptus sit,uel figura ipsa,nam cum ca contingat ab,quæ ipsi opponitur,uidelicet ef oppositæ sectioni fd ex quinquagesima secunda huius occurrere non potest.*

QVARTI LIBRI APOLLONII FINIS.